Segunda Prova - FECD

Maio 2023

1. **4 PONTOS** A Tabela abaixo mostra a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Obtenha: (a) a distribuição marginal da variável X, (b) a distribuição condicional $(Y|X = 1)$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 0$	0.1	0.2	0.05	0.15
$y = 1$	0.1	0.05	0.1	0.15
$y = 2$	0.05	0.0	0.0	0.05

---

2. **4 PONTOS** Temos interesse em gerar uma amostra pelo método Monte Carlo de uma v.a. X que possui densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{se } x \in (0,2) \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

Escreva uma pseudo-código (ou script python ou R) para gerar uma amostra de tamanho B usando um gerador de uma $U(0, 1)$ e o

- método da acumulada inversa de Stan Ulam.
- método de aceitação e rejeição de von Neumann. Veja que você deve usar uma distribuição com densidade $g(x)$ que tenha um suporte $\mathcal{S}_g$ que **contenha** o suporte $\mathcal{S}_f$ de $f(x)$ (que é o intervalo $(0, 2)$). Os suportes $\mathcal{S}_g$ e $\mathcal{S}_f$ não precisam ser idênticos mas devemos ter $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$.

---

3. **4 PONTOS** O vetor aleatório (X, Y) assume valores no retângulo $(0, 1) \times (0, 2)$ e possui densidade de probabilidade

$$f_{XY}(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{6}$$

A densidade marginal de Y é $f_Y(y) = \int f_{XY}(x, y)dx = (3y^2+y+1)/12$ para $y \in (0, 2)$. Obtenha a densidade condicional de X dado que $Y = 1$.

---

4. **4 PONTOS** O gráfico na Figura 1 exibe uma amostra do vetor aletório (X, Y) que possui certa densidade de probabilidade $f(x, y)$. Com base neste gráfico, identifique a opção correta:

- $\mathbb{E}(Y|X = 8) \approx ??$:
- $\mathbb{E}(X|Y = 30) \approx ??$:
- $\sigma(Y|X = 8) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X = 8)} \approx ??$:
- $\sigma(X|Y = 30) = \sqrt{\mathbb{V}(X|Y = 30)} \approx ??$:
- $\sigma(Y|X = x) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X = x)}$ é uma função de x. Marque V ou F:
  (i) Ela é crescente em x;
  (ii) Ela é constante com respeito a x;
  (iii) Ela é decrescente em x;
  (iv) Ela é parabólica em x;

---

5. **2 PONTOS** A desigualdade de Chebyshev diz que $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. Use esta desiguladade para obter o valor de A abaixo:

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq A$$

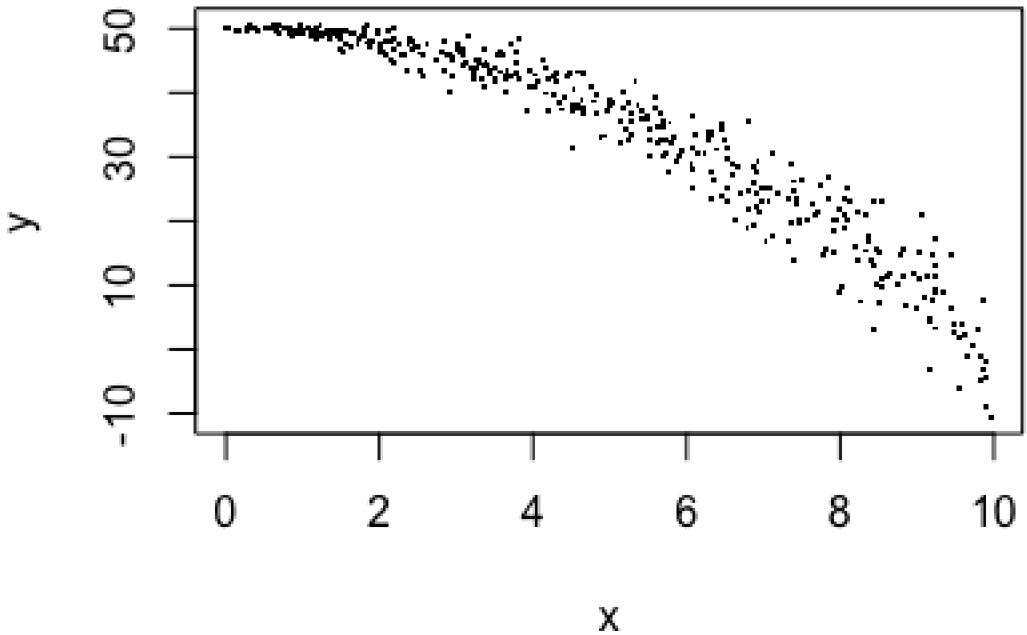

Figura 1: Amostra de um vetor aleatório (X, Y).

6. **2 PONTOS** Seja $X \sim U(0, 1)$ e $Y = e^X$.
   - Encontre a função de distribuição acumulada $\mathbb{F}(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$.
   - Obtenha a densidade de probabilidade de Y derivando a função $\mathbb{F}(y)$
   - Encontre $\mathbb{E}(Y)$