Segunda Prova - FECD

Maio 2023

1. **4 PONTOS** A Tabela abaixo mostra a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Obtenha: (a) a distribuição marginal da variável X, (b) a distribuição condicional $(Y|X = 1)$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 0$	0.1	0.2	0.05	0.15
$y = 1$	0.1	0.05	0.1	0.15
$y = 2$	0.05	0.0	0.0	0.05

Solução:

Distribuição marginal de X:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0.25 & \text{if } x = 0 \\ 0.25 & \text{if } x = 1 \\ 0.15 & \text{if } x = 2 \\ 0.35 & \text{if } x = 3 \end{cases}$$

Distribuição condicional de $(Y|X = 1)$:

$$\mathbb{P}(Y = y|X = 1) = \begin{cases} 0.80 & \text{if } y = 0 \\ 0.20 & \text{if } y = 1 \\ 0.00 & \text{if } y = 2 \end{cases}$$

---

2. **4 PONTOS** Temos interesse em gerar uma amostra pelo método Monte Carlo de uma v.a. X que possui densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{se } x \in (0, 2) \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

Escreva uma pseudo-código (ou script python ou R) para gerar uma amostra de tamanho B usando um gerador de uma $U(0, 1)$ e o

- método da acumulada inversa de Stan Ulam.
- método de aceitação e rejeição de von Neumann. Veja que você deve usar uma distribuição com densidade $g(x)$ que tenha um suporte $\mathcal{S}_g$ que **contenha** o suporte $\mathcal{S}_f$ de $f(x)$ (que é o intervalo $(0, 2)$). Os suportes $\mathcal{S}_g$ e $\mathcal{S}_f$ não precisam ser idênticos mas devemos ter $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$.

Solução:

Temos $\mathbb{F}(x) = x^2/4$ para $x \in (0, 2)$ e portanto, pelo método da transformada inversa, basta tomar $X = \mathbb{F}^{-1}(U) = \sqrt{4U} = 2\sqrt{U}$ onde $U \sim U(0, 1)$.

Aceitação-rejeição: Vamos gerar $U^* \sim U(0, 2)$. A densidade de U^* é $g(x) = 1/2$ para $x \in (0, 2)$. Precisamos escolher uma constante M tal que $f(x)/(Mg(x)) \leq 1$ para todo $x \in (0, 2)$. Como $f(x)/(Mg(x)) = (0.5x)/(0.5M) = x/M$, basta tomar $M = 2$ para que esta razão fique entre 0 e 1 para todo $x \in (0, 2)$.

Assim, para gerar um ponto aleatório de $f(x)$, gere $U^* = 2U$ onde $U \sim U(0, 1). Aseguir, aceiteopontou^* \in (0, 2)$ gerado com probabilidade $f(u^*)/g(u^*) = 0.5u^*/(2 * 0.5) = u^*/2$. Veja que $u^* \approx 0$ tem pouca chance de ser retido enquanto que $u^* \approx 2$ terá uma alta chance de ser retido.

---

3. **4 PONTOS** O vetor aleatório (X, Y) assume valores no retângulo $(0,1) \times (0,2)$ e possui densidade de probabilidade

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{6}$$

A densidade marginal de Y é $f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)dx = (3y^2+y+1)/12$ para $y \in (0,2)$. Obtenha a densidade condicional de X dado que $Y = 1$.

Solução:

Temos

$$f_{X|Y}(x|y=1) = \frac{f_{XY}(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{\frac{x^2}{4} + \frac{1^2}{4} + \frac{x*1}{6}}{(3*(1^2)+1+1)/12} = 6(x^2/10 + x/15 + 1/10)$$

---

4. **4 PONTOS** O gráfico na Figura 1 exibe uma amostra do vetor aletório (X, Y) que possui certa densidade de probabilidade $f(x, y)$. Com base neste gráfico, identifique a opção correta:

- $\mathbb{E}(Y|X=8) \approx ??$: 20
- $\mathbb{E}(X|Y=30) \approx ??$: 6.5
- $\sigma(Y|X=8) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X=8)} \approx ??$: 5
- $\sigma(X|Y=30) = \sqrt{\mathbb{V}(X|Y=30)} \approx ??$: 0.5
- $\sigma(Y|X=x) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X=x)}$ é uma função de x. Marque V ou F:
  (i) Ela é crescente em x; F
  (ii) Ela é constante com respeito a x; F
  (iii) Ela é decrescente em x; V
  (iv) Ela é parabólica em x; V

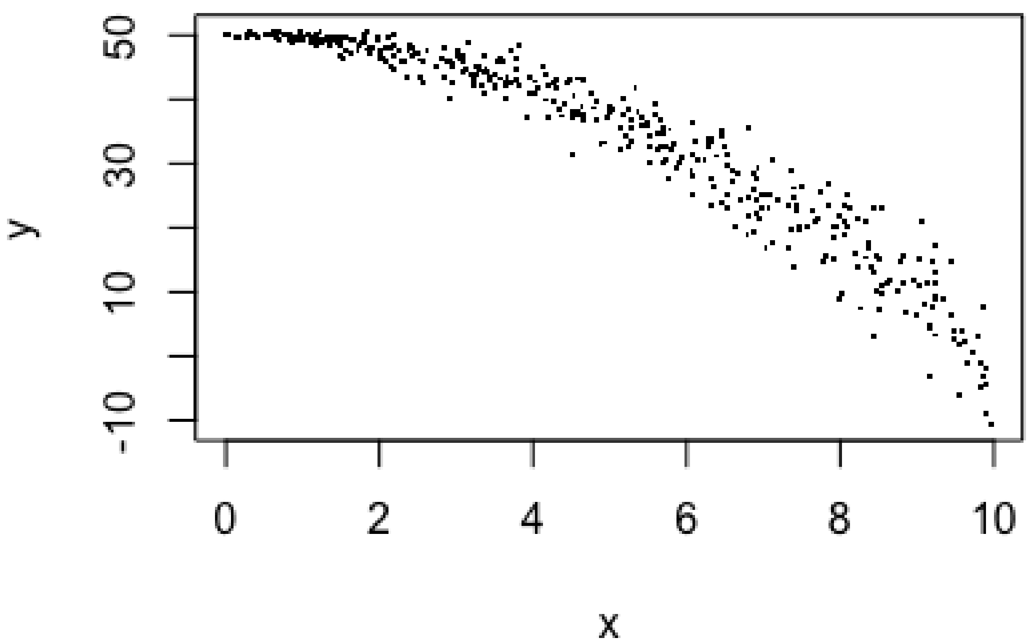

Figura 1: Amostra de um vetor aleatório (X, Y).

---

5. **2 PONTOS** A desigualdade de Chebyshev diz que $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. Use esta desiguladade para obter o valor de A abaixo:

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq A$$

Solução:

Considere o evento

$$B = \{\omega \in \Omega; \mu - 2\sigma < X(\omega) < \mu + 2\sigma\}$$

é o mesmo que o evento

$$\{\omega \in \Omega; -2\sigma < X(\omega) - \mu < 2\sigma\}$$

ou seja,

$$\{\omega \in \Omega; |X(\omega) - \mu| < 2\sigma\}$$

Assim, o evento

$$A = \{\omega \in \Omega; |X(\omega) - \mu| \geq 2\sigma\} = B^c$$

é o complementar de B. Por isto,

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 2\sigma) \geq 1 - 1/2^2 = 0.75$$

---

6. **2 PONTOS** Seja $X \sim U(0,1)$ e $Y = e^X$.

- Encontre a função de distribuição acumulada $\mathbb{F}(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$.
- Obtenha a densidade de probabilidade de Y derivando a função $\mathbb{F}(y)$
- Encontre $\mathbb{E}(Y)$

Solução:

Como $X(\omega) \in (0,1)$ teremos $Y(\omega) \in (1, e^1)$ com certeza. Assim, temos $\mathbb{F}(y) = 0$ se $y \leq 1$ e $\mathbb{F}(y) = 1$ se $y \geq e^1 = e$. Para $y \in (1, e)$, temos $\log(y) \in (0,1)$ e

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \log(y)) = \log(y)$$

A densidade é $f(y) = 1/y$ se $y \in (1, e)$ e $f(y) = 0$ fora desse intervalo.

A esperança pode ser calculada de duas maneiras alternativas:

$$\mathbb{E}(Y) = \int y f_Y(y) dy = \int_1^e y \frac{1}{y} dy = e - 1$$

ou

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 e^x f_X(x) dx = \int_0^1 e^x * 1 dx = e - 1$$