Primeira Prova
Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados

15/04/2019

1. **4 PONTOS** Seja X uma v.a. contínua com densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } x \in (0,1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Ache o valor da constante de integração c.
- Obtenha a probabilidade $\mathbb{P}(X \in (0.2, 0.3))$
- Obtenha a função distribuição acumulada $\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- Calcule a esperança $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Solução: Devemos ter uma área total igual a 1 sob a curva densidade. Portanto, devemos ter

$$1 = \int_0^1 cx^2 dx = c\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = c/3$$

e portanto $c = 3$. Para calcular probabilidades, obtemos a área sob a curva:

$$\mathbb{P}(X \in (0.2, 0.3)) = \int_{0.2}^{0.3} 3x^2 dx = (0.3)^3 - (0.2)^3$$

A função distribuição acumulada é

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x 3t^2 dt = x^3 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Finalmente, a esperança é

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_0^1 x 3x^2 dx = 3/4$$

---

2. **4 PONTOS** Uma moeda desonesta tem probabilidade de sair cara igual a θ. Os lançamentos sucessivos são independentes. A moeda é lançada sucessivamente até que a *segunda* cara apareça. Seja X a v.a. que conta o número de lançamentos que foram necessários.

- Qual a lista de valores possíveis para a v.a. X?
- Obtenha a probabilidade $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 4)$ e $\mathbb{P}(X = 5)$.
- Generalize agora obtendo $\mathbb{P}(X = k)$ para todos os valores k que são possíveis.

Solução: A lista de valores possíveis é: $2, 3, 4, \ldots$. Temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(CC) = \theta\theta = \theta^2 && (1) \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(C\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}CC) = 2(1-\theta)\theta^2 && (2) \\
\mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(C\tilde{C}\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}C\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}\tilde{C}CC) = 3(1-\theta)^2\theta^2 && (3) \\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(C\tilde{C}\tilde{C}\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}C\tilde{C}\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}\tilde{C}C\tilde{C}C) + \mathbb{P}(\tilde{C}\tilde{C}\tilde{C}CC) = 4(1-\theta)^3\theta^2 && (4) \\
\mathbb{P}(X = 5) &= (k-1)(1-\theta)^{k-2}\theta^2 \text{ para } k \geq 2 && (5)
\end{aligned}$$

---

3. **4 PONTOS** Paulo visita seu médico e descobre que ele tem hematúria microscópica - sangue em sua urina que só é visível sob um microscópio. O médico informa a Paulo que esse sintoma ocorre em cerca de 95 por cento das pessoas com câncer nos rins e em 10 por cento das demais pessoas (sem câncer nos rins). Câncer nos rins ocorre aproximadamente em 14 de cada 100 mil pessoas. Dado que ele tem hematúria microscópica, qual a probabilidade de que Paulo tenha câncer renal?

   Solução: Uso direto da regra de Bayes. Seja A o evento *Paulo tem câncer renal* e B o evento *hematúria microscópica*. Então

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)} = \frac{(0.95)(14/100000)}{(0.95)(14/100000) + (0.10)(1-14/100000)} = 0.000133/0.100119 \approx 0.0013$$

---

4. **4 PONTOS** Um canal transmite 0's e 1's. Ele pode distorcer o sinal de modo que com probabilidade 0.01 cada bit pode ser trocado de valor. Assuma que os bits sucessivos podem ser distorcidos de forma independente uns dos outros. Para reduzir a probabilidade de erro, o receptor particiona o stream de bits em blocos disjuntos de 10 bits cada e aplica um algoritmo corretor de código em cada bloco. Se no máximo um bit estiver sendo transmitido com erro num bloco, o receptor deduz sem erro o código correto. Se mais de um bit estiver errado, o algoritmo ocasionalmente consegue corrigir o código. Obtenha um limite superior para a probabilidade de que um bloco seja decodificado incorretamente.

   Solução: Para um bloco de 10 bits, seja A o evento *existe no máximo 1 erro* e B o evento *sinal decodificado com erro*. Vamos resolver de duas maneiras diferentes. A mais curta usa o fato de que o evento A está contido no evento B^c: se o bloco possui no máximo 1 erro, ele será decodificado sem erro e portanto ele está em B^c. Assim, $\mathbb{P}(B^c) \geq \mathbb{P}(A)$ e

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) \leq 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - (0.99)^{10} - 10(0.99)^9(0.01) = 0.0043\,.$$

   A segunda maneira faz uso da decomposição da probabilidade total condicionando em cada número X de erros no bloco:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=0}^{10} \mathbb{P}(B|X=k)\ \mathbb{P}(X=k) && (6)\\
&= 0 + 0 + \sum_{k=2}^{10} \alpha_k\ \mathbb{P}(X=k) && (7)\\
&\leq \sum_{k=2}^{10} 1\ \mathbb{P}(X=k) && (8)\\
&= \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) && (9)\\
&= 1 - (0.99)^{10} - 10(0.99)^9(0.01) = 0.0043 && (10)
\end{aligned}$$

---

5. **4 PONTOS** Um certo programa tem duas instruções condicionais IF:

```
If (1st boolean condition) Then
    (consequent  A)
End If
If (2nd boolean condition) Then
    (consequent  B)
End If
```

   Rodou-se o programa em 1000 inputs distintos representativos do uso futuro que se quer dar ao programa. Em 87 destas 1000 instâncias, *apenas* a instrução A do primeiro IF foi executada. Em 90 das 1000 instâncias, *apenas* a instrução B foi executada e em 12 das 1000 execuções ambas, A e B, foram executadas. Sera razoável supor que a execução do primeiro IF é um evento independente da execução do segundo IF?

   Solução: Usando a frequência relativa da ocorrência de eventos como uma aproximação para as probabilidades temos]

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{\#\text{ vezes } A \text{ ocorreu}}{1000} = \frac{87+12}{1000} \approx 0.01$$

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{90+12}{1000} \approx 0.01$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap B) \approx \frac{12}{1000} \approx 0.001 \approx \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\,.$$

Assim, é razoável supor que as execuções dos IF's são eventos aleatórios independentes.

---

6. **2 PONTOS EXTRA** Se uma variável aleatória X possui distibuição exponencial com parâmetro λ, obtenha $\mathbb{E}(X)$ (DICA: integral por partes com $u = x$ e $dv = \exp(-\lambda x)dx$)

   Solução: Se $dv = e^{-\lambda x}dx$ então $v = e^{-\lambda x}/(-\lambda)$ e

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\,\lambda \underbrace{e^{-\lambda x}dx}_{dv} = \lambda \;\; x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^\infty - \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx = \frac{1}{\lambda}$$

Fórmulas:
Binomial: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$
Poisson: $\mathbb{P}(X = k) = \lambda^k \exp(-\lambda)/k!$
Exponencial: $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$
Gaussiana (normal): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$