1^a Prova - FECD

Renato Assunção - DCC-UFMG

Junho de 2021

1. A Figura 1 mostra uma rede com quatro nós e cinco arestas. Suponha que cada conexão falha com probabilidade 0.10 e que as falhas de conexões sejam eventos independentes. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(E)$ do evento E de que exista pelo menos um caminho ativo de B para C. DICA: considere a probabilidade $\mathbb{P}(E^c)$ do evento complementar E^c.

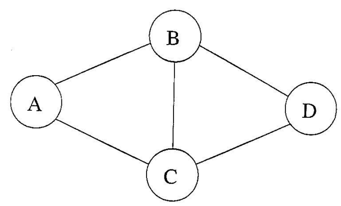

Figura 1: Rede com quatro nós.

Solução: Vamos representar por $B \to C$ a existência de um caminho ativo entre B e C. A existência de um caminho ativo entre B e C nos obriga a considerar várias possibilidades: apenas um caminho ativo, dois caminhos dentre três ou todos os três caminhos. É mais fácil calcular a probabilidade $\mathbb{P}(B \nrightarrow C)$ de não haver nenhum caminho ativo e usar $\mathbb{P}(B \to C) = 1 - \mathbb{P}(B \nrightarrow C)$. A probabilidade $\mathbb{P}(B \nrightarrow C)$ equivale a ter todos os três caminhos possíveis desativados. Vamos representar por $\overline{ijk}$ um caminho passando pelos nós i, j e k e por ijk se ele estiver ativo.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \nrightarrow C) &= \mathbb{P}\left(\overline{BC} \cap \overline{BAC} \cap \overline{BDC}\right) \\
&= \mathbb{P}(\overline{BC})\ \mathbb{P}(\overline{BAC})\ \mathbb{P}(\overline{BDC}) \qquad \text{pela indep. dos eventos} \\
&= 0.1 \times (1 - \mathbb{P}(BAC)) \times (1 - \mathbb{P}(BDC)) \\
&= 0.1 \times (1 - \mathbb{P}(BA)\mathbb{P}(AC)) \times (1 - \mathbb{P}(BD)\mathbb{P}(DC)) \\
&= 0.1 \times (1 - 0.9 * 0.9) \times (1 - 0.9 * 0.9) = 0.00361
\end{aligned}
$$

Portanto, a probabilidade desejada é igual a $\mathbb{P}(B \to C) = 1 - 0.00361 = 0.99639$.

Alguns alunos costumam este problema usando uma fórmula mais elaborada da regra de probabilidade de união de eventos:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Esta abordagem está correta mas requer uma boa quantidade de cálculos.

---

2. Um dado bem equilibrado é lançado independentemente. Considera-se que ocorreu sucesso se sair a face 1 ou 2. O dado é lançado sucessivamente e de forma independente até que ocorra o segundo sucesso. Descreva o espaço amostral deste experimento e atribua probabilidades aos resultados possíveis.

   OBS: Este problema é o modelo ultra-simplificado para tratar problemas reais em que observa-se um fenômeno repetidamente até que um "sucesso" é registrado. Por exemplo, uma sucessão de sessões de um mesmo usuário no Instagram até que, pela primeira vez, ele clique num anúncio. Existe interesse em modelar o némero aleatório de sessões que precisamos esperar até este primeiro sucesso.

Solução: Existem pelo menos duas maneiras de resolver este problema. Uma delas estabelece o espaço amostral como sendo o conjunto de todas as sequências finitas de sucessos e fracassos com pelos menos duas posições e contendo apenas dois sucessos sendo que um deles está na última posição da sequência. Acho que a maioria dos que tentam uma notação matemática para este conjunto costumam se atrapalhar. Minha notação é a seguinte:

$$\Omega = \left\{ \omega ; \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S), n \geq 2, \text{ com } a_j \in \{F, S\} \text{ e } \sum_{j=1}^{n-1} I(a_j = S) = 1 \right\} .$$

Com este espaço amostral Ω, as probabilidades devem ser atribuídas aos elementos ω com $\mathbb{P}(\omega)$. Isto é fácil: pela indepedência, a chance de observar uma sequência $\omega \in \Omega$ é o produto das probabilidades de cada lançamento sucessivo e devemos ter então:

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tag{1}$$

Veja que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ e sua soma sobre todos os elementos de Ω é igual a 1. Para isto, seja $S_n \subset \Omega$ o subconjunto contendo os elementos] ω de tamanho n. Isto é, todas as sequências $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S)$ de tamanho fixo n. Como existe um único sucesso S nas primeiras $n-1$ posições, S_n possui $n-1$ elementos distintos, todos eles com a mesma probabilidade dada em (1). Assim,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\omega \in S_n} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\omega \in S_n} \mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \tag{2}$$

Para completar o cálculo, vamos usar um resultado conhecido de séries geométricas. Como

$$1/(1-r) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m ,$$

derivando com relação a r dos dois lados desta igualdade encontramos

$$\frac{1}{(1-r)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m r^{m-1}$$

Assim, retomando o cálculo em (2), temos

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{3^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \underbrace{=}_{n-1 \to m} \frac{1}{3^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} = \frac{1}{3^2} \frac{1}{(1-2/3)^2} = 1 .$$

Outra interpretação possível do problema focaria apenas no número total de lançamentos, e não na sequência específica de S e F. Neste caso, podemos agrupar todas as sequências de tamanho n deste Ω. Isto é, o espaço amostral poderia ser descrito como

$$\Omega^* = \{n \in \mathbb{N} \text{ tais que } n \geq 2\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$$

onde $n \in \Omega^*$ representa o número total de lançamentos necessários para obter os dois primeiros sucessos. Neste caso, a atribuição de probabilidades aos elementos deste Ω^* é a seguinte:

$$\mathbb{P}(n) = (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Esta probabilidade é encontrada somando a expressão em (1) sobre as $n-1$ possíveis posições do único sucesso anterior ao segundo sucesso que está na posição n.

---

3. Com relação ao problema anterior, imagine que temos dois dados disponíveis. Um é bem equilibrado (como no problema anterior). O outro dado é viciado e a probabilidade de que saia a face 1 ou 2 é igual a 1/4. Um dos dois dados é escolhido com igual probabilidade e ele é jogado sucessivamente até que o segundo sucesso ocorra. Descreva o espaço amostral deste experimento e atribua probabilidades aos resultados possíveis.

   OBS: Estamos ampliando o modelo-caricatura anterior. Imagine duas populações de usuários em que metade deles são MENOS propensos a clicar no anúncio (menor probabilidade de sucesso). Isto é representado pelo dado desbalanceado. O usuário que vamos acompanhar é escolhido ao acaso desta população em que existe uma mistura de mais e menos propensos.

   Solução: Como no problema anterior, existem duas maneiras de resolver este problema. A primeira estabelece o espaço amostral como sendo o mesmo conjunto do problema anterior acrescido de um indicador de qual dos dois dados foi escolhido, o balanceado (b) ou o desbalanceado ($\bar{b}$):

$$\Omega = \left\{ \omega; \omega = (B, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S), n \geq 2, \text{ com } B \in \{b, \bar{b}\}, a_j \in \{F, S\} \text{ e } \sum_{j=1}^{n-1} I(a_j = S) = 1 \right\} .$$

   Temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\omega) &= \mathbb{P}(B, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S) \\
&= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S|B) \\
&= \begin{cases} (1/2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \text{se } B = b \\ (1/2)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \ \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \text{se } B = \bar{b} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Com o resultado do problema anterior, é fácil ver que a soma das probabilidades neste problema atual também é igual a 1:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\omega \in S_n} \left(\mathbb{P}(B = b)\mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S|B = b) + \mathbb{P}(B = \bar{b})\mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S|B = \bar{b}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\omega \in S_n} \left(\mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S|B = b) + \mathbb{P}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, S|B = \bar{b}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned}$$

   Outra opção é representar apenas o número de jogadas necessárias para ter dois sucessos *sem registrar qual dado foi escolhido*. Neste caso, tome $\Omega = \{2, 3, 4, ...\}$. Seja $B = \{b, \bar{b}\}$ o indicador de qual dado foi selecionado, um indicador que não é registrado em Ω. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n) &= \mathbb{P}(n|B = b) \ \mathbb{P}(B = b) + \mathbb{P}(n|B = \bar{b}) \ \mathbb{P}(B = \bar{b}) \\
&= \frac{1}{2}(n-1) \left((1/3)^2 (1 - 1/3)^{n-2} + (1/4)^2 (1 - 1/4)^{n-2} \right)
\end{aligned}$$

---

4. Um estudo é realizado para investigar a relação entre possuir animais de estimação e felicidade. Uma amostra de 1000 indivíduos é selecionada aleatoriamente. De cada um, coleta-se dados indicando se o indivíduo possui ou não possui pelo menos um animal de estimação e um questionário que permite criar uma pontuaÃ§Ã£o de felicidade (de 1 a 10, sendo 10 extremamente feliz). Descobre-se que aqueles que possuem animais de estimação são muito mais felizes, em média. O jornal recomenda adotar um animal se você quer ser mais feliz. O que você pode dizer sobre esta matéria de jornal depois do que aprendeu no curso?

   Solução: O estudo é observacional pois o tratamento (possui animal de estimação) não foi determinado pelo pesquisador. A afirmação leva a uma direção de causalidade: possuir bichos de estimação aumenta a sensação de felicidade. Existem várias razãoes para duvidar disso. Primeiro, a direção correta pode ser a reversa: pessoas mais deprimidas e infelizes podem ter menos interesse, disponibilidade ou energia para cuidar de um animal de estimação. Pessoas mais felizes podem ter mais interesse em conectar-se com o mundo e por isto são mais propensas a adotar animais de estimação. Em segundo lugar, variáveis de confundimento podem estar atuando. Por exemplo, pessoas com maior renda e padrão de vida podem adotar animais com mais frequência e, por causa de sua melhor condição econômica, terem uma visão mais otimista da vida.

---

5. O periódico Lancet é um dos melhores do mundo na área médica. Em 2012, eles prublicaram um estudo, em `https://doi.org/10.1016/S0140-6736(12)61426-3`, que analisou dados de mais de 10.000 pacientes em hospitais ingleses com dislipidemia (a elevação anormal dos níveis de lipídios (gorduras) no sangue, como colesterol e triglicérides). Leia a descrição sumarizada em `https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736(12)61426-3/fulltext`. O estudo descobriu que pacientes com altos níveis de condicionamento físico eram menos propensos a morrer do que pacientes com baixo nível de condicionamento físico. O padrão manteve-se verdadeiro se os pacientes estavam tomando estatinas ou não (estatinas são os principais remédios prescritos para baixar o colesterol). Os pesquisadores concluíram o seguinte:

   "O tratamento com estatinas e o aumento da aptidão estão independentemente associados à baixa mortalidade entre os indivíduos dislipidêmicos. A combinação do tratamento com estatinas e aumento da aptidão resultou em risco de mortalidade substancialmente menor do que ambos isoladamente, reforçando a importância da atividade física para indivíduos com dislipidemia."

   O que você pode dizer sobre este artigo depois do que aprendeu no curso?

   Solução: Eu acredito que a conclusão deste estudo é correta mas existem dificuldades que levam a dúvidas razoáveis sobre a validade dessas conclusões. Este é um estudo observacional. O uso de estatinas e o nível de atividades físicas não foram determiandos aleatoriamente pelo pesquisador. É] senso comum, e existem muitas evidências para acreditarmos que mais exercícios físicos melhoram o condicionamento físico e à melhora da saúde. Entretato, podemos pensar também que pessoas saudáveis têm muito mais probabilidade de praticar exercícios, revertendo direção de causa e efeito na conclusão do estudo. Além disso, podem haver fatores de confundimento que perturbam a relação direta entre exercício e saúde. Por exemplo, pessoas que fazem mais exerc{ıcios físicos podem ter dieta mais saudável, sofrer menos stress, ter mais tempo livre, cuidam mais de si mesmos de forma geral. Tudo isto pode levar a uma menor mortalidade, que acaba sendo inteiramente atribuída à prática de exercícios físicos.
