

1^a Prova - FECD A - 2025

Renato Assunção

1. Uma variável aleatória discreta X assume os valores 1, 2, 3, 4 com probabilidades

$$\mathbb{P}(X = x) = k \cdot x, \quad x = 1, 2, 3, 4.$$

- Determine a constante de normalização k .
- Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- Calcule $\mathbb{E}(X)$.

2. Um pesquisador está interessado em estudar a relação causal entre *tempo de tela diário* (horas em celular/computador) e *qualidade do sono* entre estudantes. Ele realiza um estudo observacional por questionários e encontra que alunos com *menos* tempo de tela têm, em média, melhor sono autorrelatado. Explique por que é difícil concluir, a partir dessa evidência, que reduzir o tempo de tela *causa* melhora do sono. Dê dois exemplos de possíveis confundidores e explique o papel do desenho amostral nessa dificuldade.

3. Sejam A e B eventos com $\mathbb{P}(B) > 0$. Mostre que

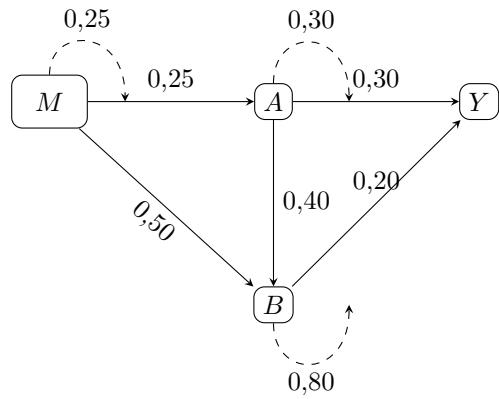
- $\mathbb{P}(A^c | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$
- $\mathbb{P}(A \cup C | B) = \mathbb{P}(A | B) + \mathbb{P}(C | B)$ se A e C são disjuntos

4. Em um estudo sobre o desempenho de alunos em Matemática, eles foram classificados de acordo com o **tipo de escola** (4 tipos: Pública Estadual, Pública Municipal, Privada, Técnica) e o **nível de desempenho** (3 categorias: Alto, Médio, Baixo). As probabilidades de que um aluno caia em cada uma das 12 categorias são dadas na tabela abaixo:

Escola	Alto	Médio	Baixo
Pública Estadual	0.12	0.08	0.10
Pública Municipal	0.10	0.07	0.08
Privada	0.20	0.10	0.05
Técnica	0.07	0.02	0.01

Calcule as seguintes probabilidades (pode deixar as contas apenas indicadas):

- (a) $P(\text{Médio})$
(b) $P(\text{Privada})$
(c) $P(\text{Privada} | \text{Médio})$
(d) $P(\text{Médio} | \text{Privada})$
5. Em uma população, 2% das pessoas possuem uma certa doença rara. Existe um teste médico para detectar essa doença. O teste é positivo em 95% dos doentes (sensibilidade) e também positivo em 5% dos saudáveis (falsos positivos).
 - (a) Se uma pessoa sorteada ao acaso tem o teste positivo, qual a probabilidade de ela realmente ter a doença?
 - (b) Ao fazer o cálculo, você vai obter a resposta igual a 0.28, Interprete este resultado e explique a importância da prevalência na aplicação da regra de Bayes.
6. Um programa possui quatro módulos: M , A , B e Y . A entrada ocorre apenas em M . Cada módulo pode ser executado *no máximo uma vez* e o programa pode ser interrompido em qualquer módulo. As transições (com probabilidades condicionais) são:
 - De M : vai para A com prob. 0,25, para B com prob. 0,50, ou interrompe com prob. 0,25.
 - De A : vai para Y com prob. 0,30, para B com prob. 0,40, ou interrompe com prob. 0,30.
 - De B : vai para Y com prob. 0,20 ou interrompe com prob. 0,80.
 - Y é terminal.



- (a) Calcule $\mathbb{P}(Y \mid A \text{ foi executado})$.
 (b) Calcule $\mathbb{P}(A \mid B \text{ foi executado})$.