2^a Prova - FECD

Renato Assunção - DCC-UFMG

Julho de 2021

1. **5 PONTOS**

   Vesículas são pequenas estruturas celulares de tamanhos variados e com formato aproximadamente esférico de células. Suponha que essas esferas possuem um raio aleatório R com densidade $f_R(r) = 6r(1-r) = 6(r-r^2)$ para $r \in (0,1)$. Temos interesse em obter a distribuição de probabilidade do volume aleatório $V = 4\pi/3R^3$ induzido pelo raio R.

   - Estabeleça o intervalo de valores possíveis para o volume aleatório V.
   - Para um valor v no intervalo obtido acima, obtenha a distribuição acumulada $\mathbb{F}_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v)$.
   - Derive a função $\mathbb{F}_V(v)$ para obter a função densidade de probabilidade $f_V(v)$.
   - A densidade $f_R(r)$ do raio é mais concentrada em torno do ponto $r = 1/2$, o centro do intervalo $(0,1)$ onde os raios podem variar. A densidade $f_V(v)$ do volume também é mais concentrada em torno do ponto médio do intervalo de valores possíveis do volume? Ou ela é mais concentrada em alguma outra região desse intervalo?

2. **5 PONTOS** Temos interesse em gerar uma amostra pelo método Monte Carlo de uma v.a. X que possui densidade de probabilidade

   $$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8, & \text{se } x \in (0,2) \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

   Escreva uma pseudo-código (ou script python ou R) para gerar uma amostra de tamanho B usando um gerador de uma $U(0,1)$ e o

   - método da transformada inversa de Stan Ulam.
   - método de aceitação e rejeição de von Neumann. Veja que você deve usar uma distribuição com densidade $g(x)$ que tenha um suporte $\mathcal{S}_g$ que **contenha** o suporte $\mathcal{S}_f$ de $f(x)$ (que é o intervalo $(0,2)$). Os suportes $\mathcal{S}_g$ e $\mathcal{S}_f$ não precisam ser idênticos mas apenas $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$.
   - No método de aceitação e rejeição, para gerar a amostra de tamanho B de f, quantos elementos em média de g devem ser gerados?
   - Método de amostragem por importância.

3. **5 PONTOS** A Tabela abaixo mostra a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X,Y). Obtenha: (a) a distribuição marginal da variável Y, (b) a distribuição condicional $(X|Y=2)$.

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=0$	0.1	0.2	0.05	0.15
$y=1$	0.1	0.05	0.1	0.15
$y=2$	0.05	0.0	0.0	0.05

4. **5 PONTOS** Um ponto X é escolhido com distribuição uniforme no intervalo $(0,L)$. Este ponto X particiona o intervalo $(0,L)$ em dois segmentos. Calcule a probabilidade de que a razão entre o segmento menor e o segmento maior seja menor que $1/4$. (Dica: faça o cálculo condicionando em cada uma das duas possibilidades, $X < L/2$ e $X \geq L/2$.)