

2ª Prova - FECD A - 27/05/2024

30 pontos - Renato Assunção

1. **5 PONTOS** Consider two discrete random variables X and Y with the following joint probability mass function (pmf):

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0.1 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \\ 0.2 & \text{if } (x, y) = (0, 1) \\ 0.1 & \text{if } (x, y) = (1, 0) \\ 0.4 & \text{if } (x, y) = (1, 1) \\ 0.2 & \text{if } (x, y) = (1, 2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) Compute the marginal pmf of X , $P(X = x)$, for $x = 0, 1$.
 - (b) Compute the marginal pmf of Y , $P(Y = y)$, for $y = 0, 1, 2$.
 - (c) Compute the conditional pmf $P(Y = y | X = 1)$ for $y = 0, 1, 2$.
 - (d) Compute the conditional pmf $P(X = x | Y = 1)$ for $x = 0, 1$.
 - (e) Are X and Y independent random variables? Justify your answer.
-

2. **5 PONTOS** X is a random variable with support in the interval $[0, 1]$ and density function given by $f_X(x) = 6(x - x^2)$ for $x \in [0, 1]$. The plot of this density function is on the left-hand side of Figure 1. A random value of X is taken and then a random cube is created with X as its edge. Let $Y = X^3$ be the volume of this random cube.

- a) **5%:** Which of the following four probabilities is the highest one: $\mathbb{P}(X \in [0.0, 0.2])$, $\mathbb{P}(X \in [0.8, 1.0])$, $\mathbb{P}(X \in [0.2, 0.4])$, or $\mathbb{P}(X \in [0.4, 0.6])$?
 - b) **5%:** Give a rough estimate of the probability you selected in the previous item. It is not necessary to be a precise estimate.
 - c) **80%:** Find the probability density of Y given by $f_Y(y) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1\right)$ with graph shown on the right-hand side of Figure 1.
 - d) **10% :** Show that $\mathbb{E}(Y) = 1/5$.
-

3. **5 PONTOS** O gráfico à esquerda na Figura 2 exibe uma amostra do vetor aleatório (X, Y) com certa densidade $f(x, y)$. Com base neste gráfico, identifique a opção correta:

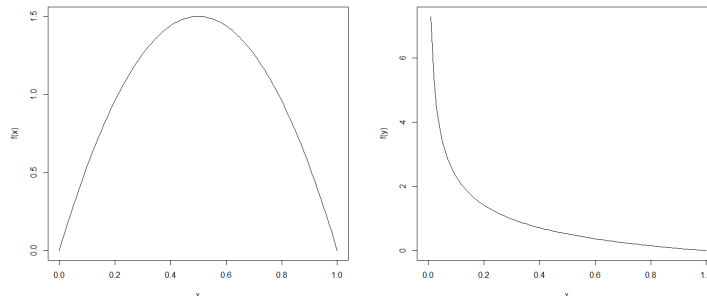


Figura 1: Left: Density $f_X(x) = 6(x - x^2)$. Density of Y : $f_Y(y) = 2(1/\sqrt[3]{y} - 1)$.

- $\mathbb{E}(Y|X = 8) \approx ??$: (i) 8 (ii) -5 (iii) 33 (iv) 15 (v) 0
- Suponha que sabemos que $X < 5$. Ache $\mathbb{E}(X|Y = 10 \text{ e } X < 5) \approx ??$: (i) 0 (ii) 1 (iii) 8 (iv) -10 (v) 4
- $\sigma(Y|X = 0) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X = 0)}$ é aproximadamente igual a: (i) 1.5 (ii) 0 (iii) 0.1 (iv) 10.0 (v) -1.0
- $\sigma(Y|X = 2) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X = 2)}$ é aproximadamente igual a: (i) 1.5 (ii) 0 (iii) 0.1 (iv) 10.0 (v) -1.0
- $\sigma(Y|X = x) = \sqrt{\mathbb{V}(Y|X = x)}$ é uma função de x . Ela é:
 - (i) crescente em x ;
 - (ii) constante com respeito a x ;
 - (iii) decrescente em x ;
 - (iv) parabólica em x .

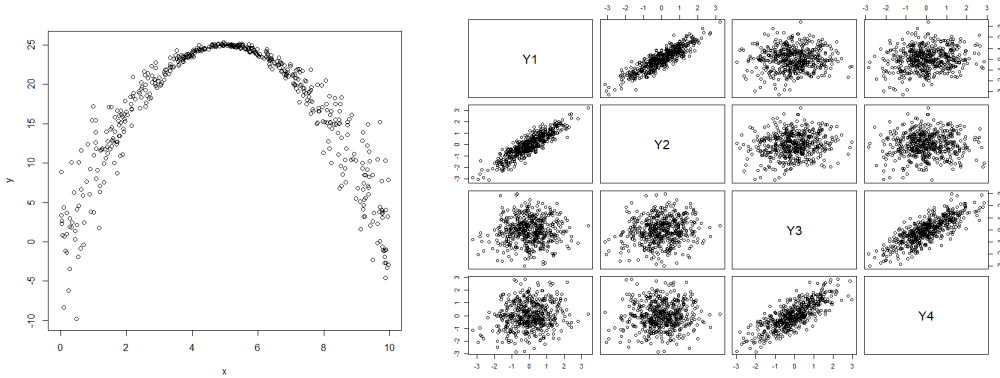


Figura 2: Left: Amostra de um vetor aleatório (X, Y) . Right: Scatterplot of sample of random vetor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$.

4. **5 PONTOS** Temos interesse em gerar uma amostra pelo método Monte Carlo de uma v.a. X que possui densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x/50, & \text{se } x \in (0, 10) \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

Assumindo que você consegue gerar variáveis aleatórias com distribuição $U(0, 1)$, escreva um pseudo-código para gerar uma amostra de tamanho B usando:

- o método da acumulada inversa de Stan Ulam.
- o método de aceitação e rejeição de von Neumann. Veja que você deve usar uma distribuição com densidade $g(x)$ que tenha um suporte $\mathcal{S}_g$ que **contenha** o suporte $\mathcal{S}_f$ de $f(x)$ (que é o intervalo $(0, 10)$). Os suportes $\mathcal{S}_g$ e $\mathcal{S}_f$ não precisam ser idênticos mas apenas $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$.

5. **5 PONTOS** O gráfico à direita na Figura 2 exibe os gráficos de dispersão de uma amostra do vetor aleatório $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$. Se as variâncias de todas as quatro variáveis é igual a 1 e sabendo que a covariância entre as variáveis Y_i e Y_j é $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, obtenha valores aproximados para os elementos $(2, 1)$, $(2, 3)$, e $(3, 4)$ da matriz 4×4 de covariância do vetor $\mathbf{Y}$.

6. **5 PONTOS** O vetor aleatório (X, Y) tem suporte no quadrado $(0, 1)^2$ e possui densidade de probabilidade $f(x, y) = (6/5)(x^2 + 2xy + y^2)$ neste quadrado.

- Obtenha a densidade marginal $f_X(x)$ e obtenha o seu valor em $x = 1/2$ (isto é, avalie $f_X(1/2)$.)
- Obtenha a densidade condicional $f_{Y|X}(y|x = 1/2)$.