TEOREMAS LIMITE EM PROBABILIDADE

RENATO ASSUNÇÃO

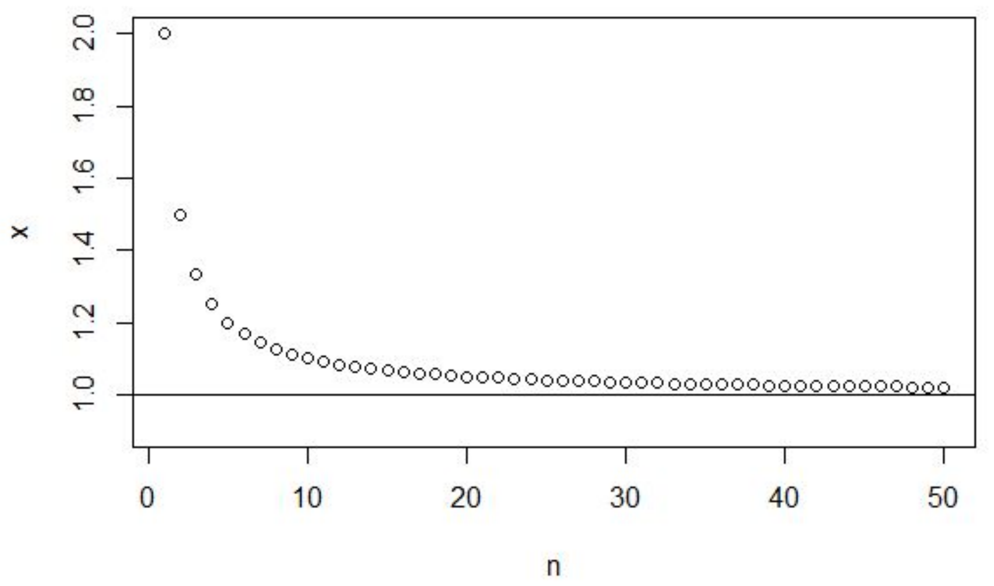
DCC - UFMG

Referência para um estudo aprofundado das questões
(e demonstrações das afirmações feitas aqui)

LIMITE DE NÚMEROS REAIS

- Sequência de números reais x_n
- Quando dizemos que x_n converge para um limite L?
- Olhamos para a diferença $|x_n - L|$
- Queremos que isto vá para zero quando n cresce.
- Difícil formalizar de modo genérico, para toda e qualquer sequência.

EXEMPLO



- Seja $x_n = 1 + \frac{1}{n}$
- Vemos que $|x_n - 1| \to 0$ qdo $n \to \infty$
- Considere agora a seguinte sequência:
- $x_n = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{1}{n} \ se\ n \neq 10^k \\ 2, se\ n = 10^k \end{Bmatrix}$
- Agora, $|x_n - 1| \to 0$ qdo $n \to \infty$ e $n \neq 10, 100, 1000, 10000, 100000, \ldots$
- Se $n = 10, 100, 1000, 10000, 100000, \ldots$ teremos $x_n = 2$
- Cada vez mais raramente x_n se afasta de 1 mas NUNCA teremos
- $|x_n - 1|$ pequeno para TODO n

ESTA CONFUSÃO DEFINIÇÃO RIGOROSA

- Definição:
- $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ converge para L quando $n \to \infty$ <u>significa que</u>

  $\forall\, \varepsilon > 0,$

  $\exists\ n_0(\varepsilon),$

  tal que $|x_n - L| < \varepsilon$

  para todo $n > n_0(\varepsilon),$

CONVERGÊNCIA COM PROBABILIDADE

- Sequência de variáveis aleatórias S_1, S_2, S_3, ...
- Quando podemos dizer que S_n converge?
- Qual o sentido, o significado, que queremos dar a esta convergência?

Kerrich's experiment

- A South African mathematician named John Kerrich was visiting Copenhagen in 1940 when Germany invaded Denmark
- Kerrich spent the next five years in an interment camp
- To pass the time, he carried out a series of experiments in probability theory
- One of them involved flipping a coin 10,000 times

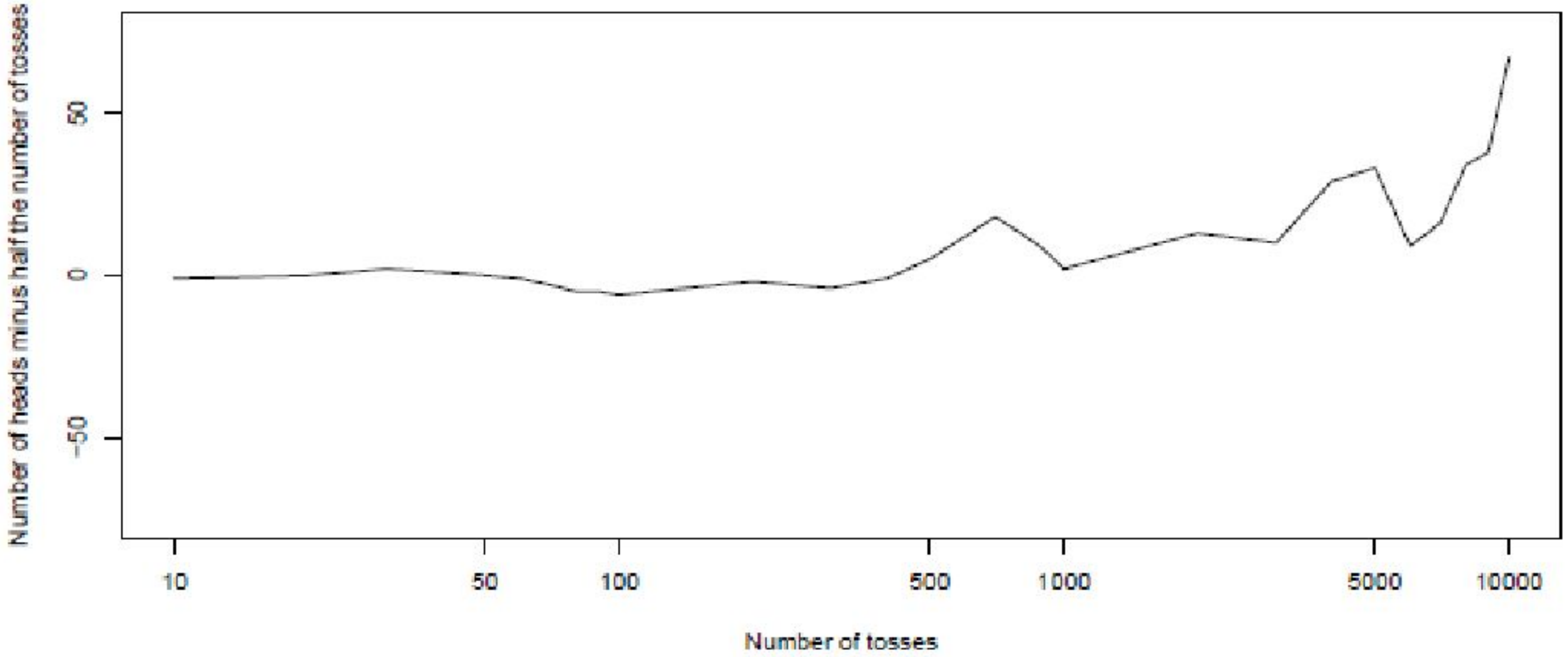
The law of averages

- We know that a coin lands heads with probability 50%
- Thus, after many tosses, the law of averages says that the number of heads should be about the same as the number of tails . . .
- . . . or does it?

Kerrich's results

Number of tosses (n)	Number of heads	Heads - $0.5 \cdot$Tosses
10	4	-1
100	44	-6
500	255	5
1,000	502	2
2,000	1,013	13
3,000	1,510	10
4,000	2,029	29
5,000	2,533	33
6,000	3,009	9
7,000	3,516	16
8,000	4,034	34
9,000	4,538	38
10,000	5,067	67

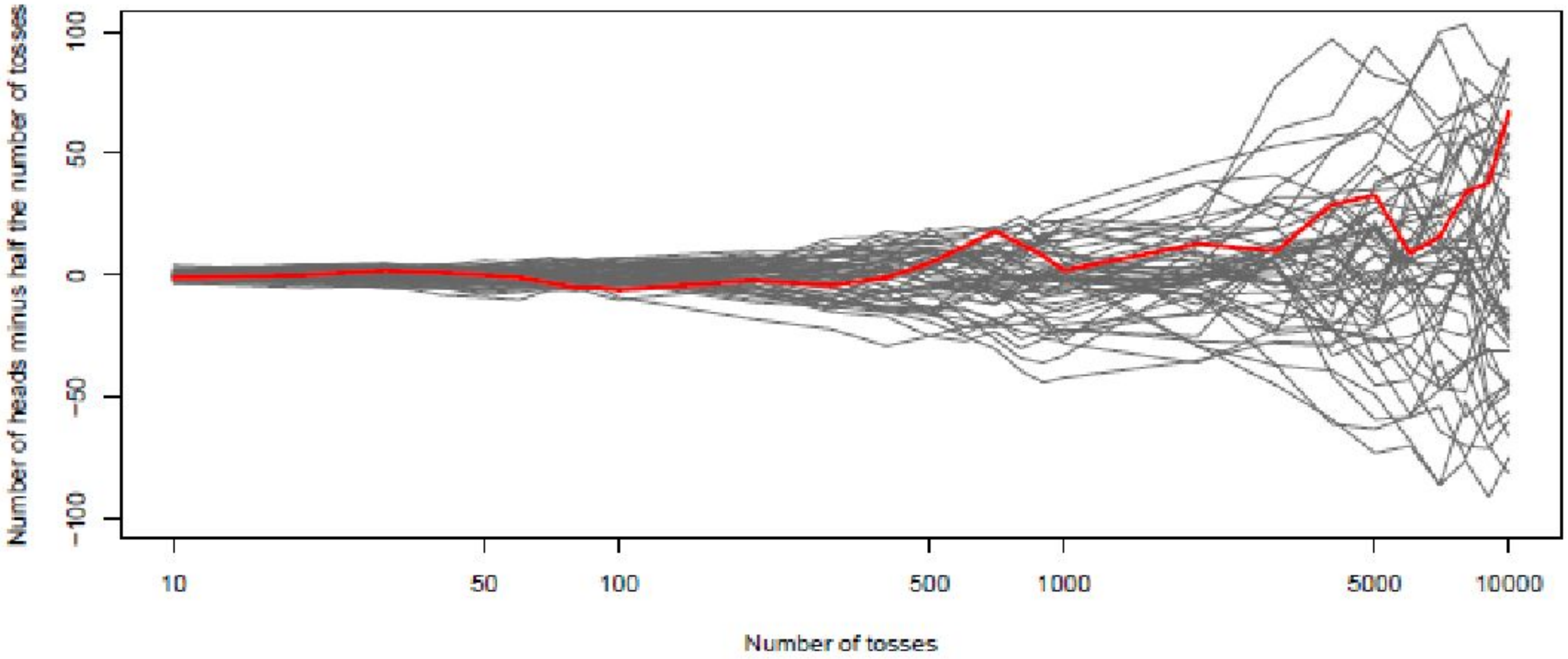
Kerrich's results plotted



Instead of getting closer, the numbers of heads and tails are getting farther apart

Repeating the experiment 50 times

This is no fluke:



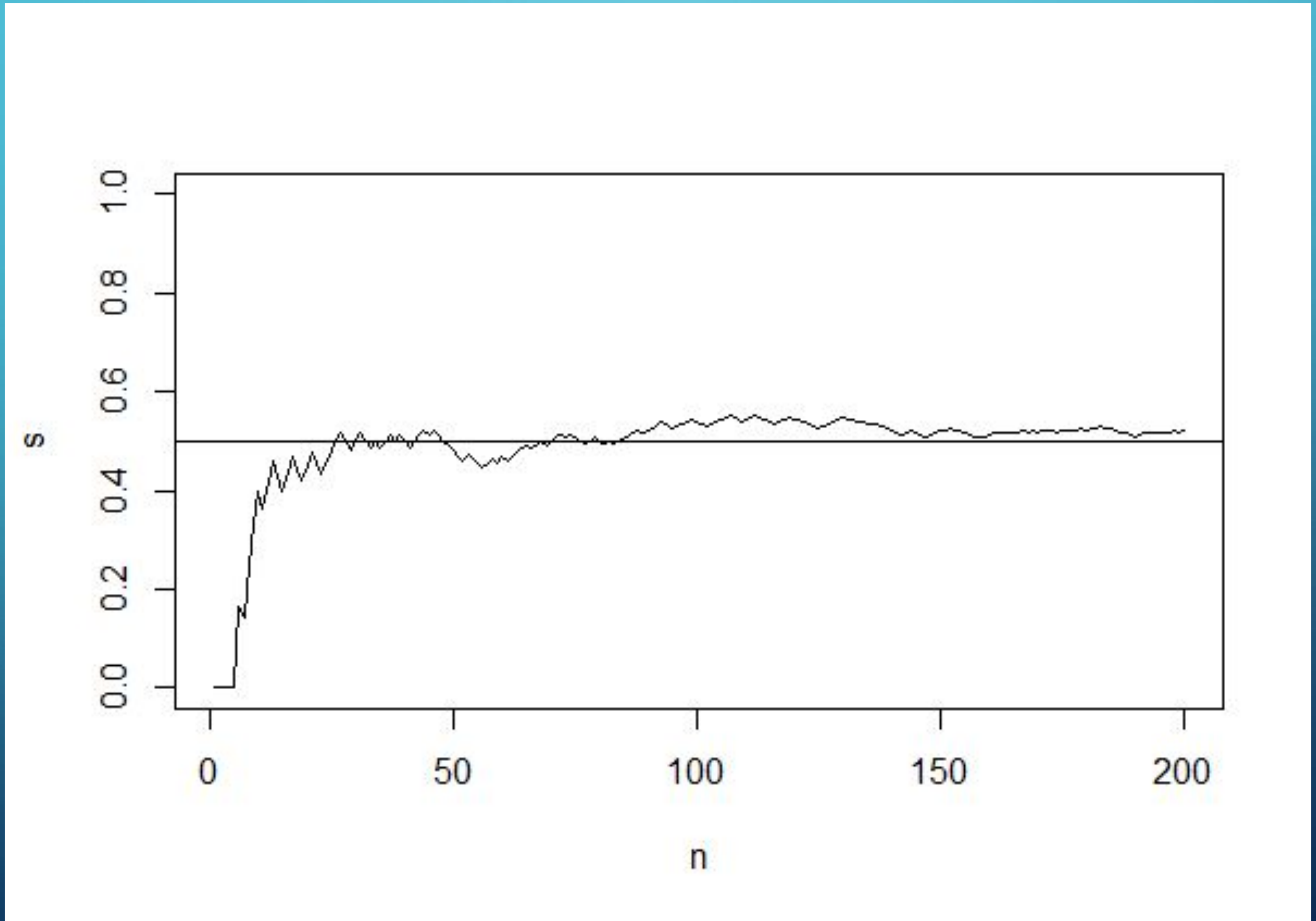
Where's the law of averages?

- So where's the law of averages?
- Well, the law of averages does **not** say that as n increases the number of heads will be close to the number of tails
- What it says instead is that, as n increases, the average number of heads will get closer and closer to the long-run average (in this case, 0.5)
- The technical term for this is that the sample average, which is an estimate, *converges* to the *expected value*, which is a parameter

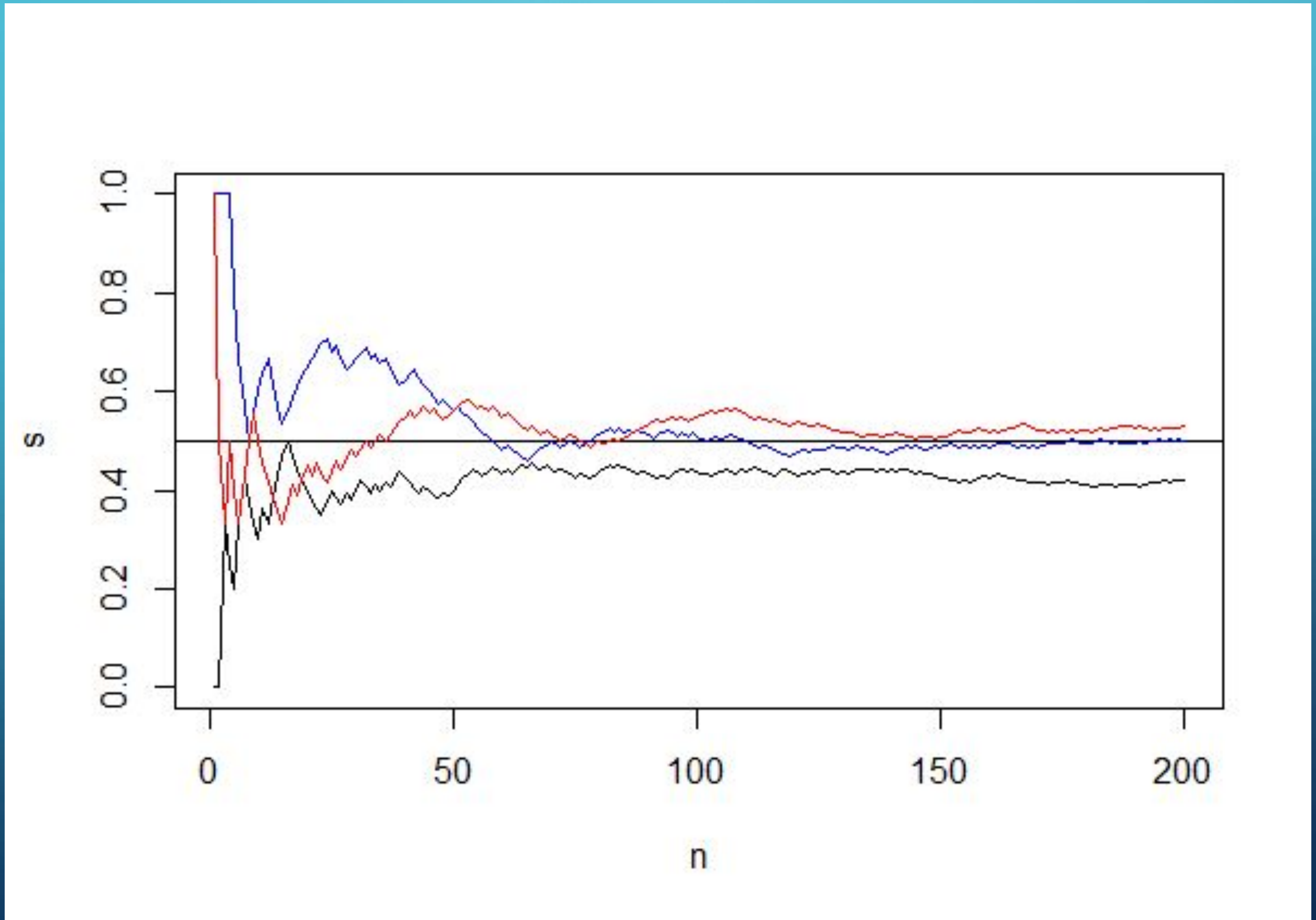
EXEMPLO: SEMPRE AS MOEDAS...

- Considere jogar uma moeda honesta para cima repetidamente
- Seja $X_n = 1$ se lançamento n é cara, e $X_n = 0$, se coroa
- Seja $Y_n = (X_1+\ldots+X_n)/n$
- Y_n é a proporção de caras nos primeiros n lançamentos.
- O que esperamos ver quando n crescer?
- Y_n □ ½ , certo? Mas a sequência 1,1,1,1,1,1,1,1 é tão provável quanto outra sequência de tamanho 8

VAMOS SIMULAR NO COMPUTADOR



TRÊS REPETIÇÕES (SEQUÊNCIAS) INDEPENDENTES



A curva em preto vai convergir?

Provavelmente?

Com certeza?

UMA V.A. É FORMADA POR DUAS COISAS...

- Seja $X_n = 1$ se lançamento n é cara, e $X_n = 0$, se coroa
- Seja $Y_n = (X_1+...+X_n)/n$
- Y_n é a proporção de caras nos primeiros n lançamentos.
- O que é Y_n?
- É uma V.A. lista de valores possíveis e lista de probabilidades associadas
- Valores possíveis: 0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n, n/n depende de n
- Probabilidades associadas: $P(Y_n = k/n) = P(X_1+...+X_n = k) =$ Binomial

LIMITE DE V.A.

- Seja $Y_n = (X_1+\ldots+X_n)/n$
- $\{Y_n : n = 1, 2, \ldots\}$ é uma sequência de v.a.'s
- Y_n não é independente de Y_{n+1}
- Se você me disser que $Y_{50} = 1/2$ então eu sei que Y_{51} terá de ser apenas um dos dois valores possíveis: 25/51 ou 26/51
- Com que probabilidade isto vai ocorrer?
- Posso dizer que Y_n converge para alguma coisa?
- Existe o limite ALEATÓRIO $\lim_{n\to\infty} Y_n$

CONVERGÊNCIA QUASE CERTA

- Almost sure convergence
- Vamos ver em que sentido diremos que $\{Y_n : n = 1, 2, \ldots\}$ converge **<u>quase certamente para a constante</u>** μ quando $n \longrightarrow \infty$
- $Y_n \rightarrow \mu$ q.c. se $P\{\lim_{n\to\infty} Y_n \rightarrow \mu\} = 1$
- Para entender isto melhor, vamos voltar às moedas em sequência.

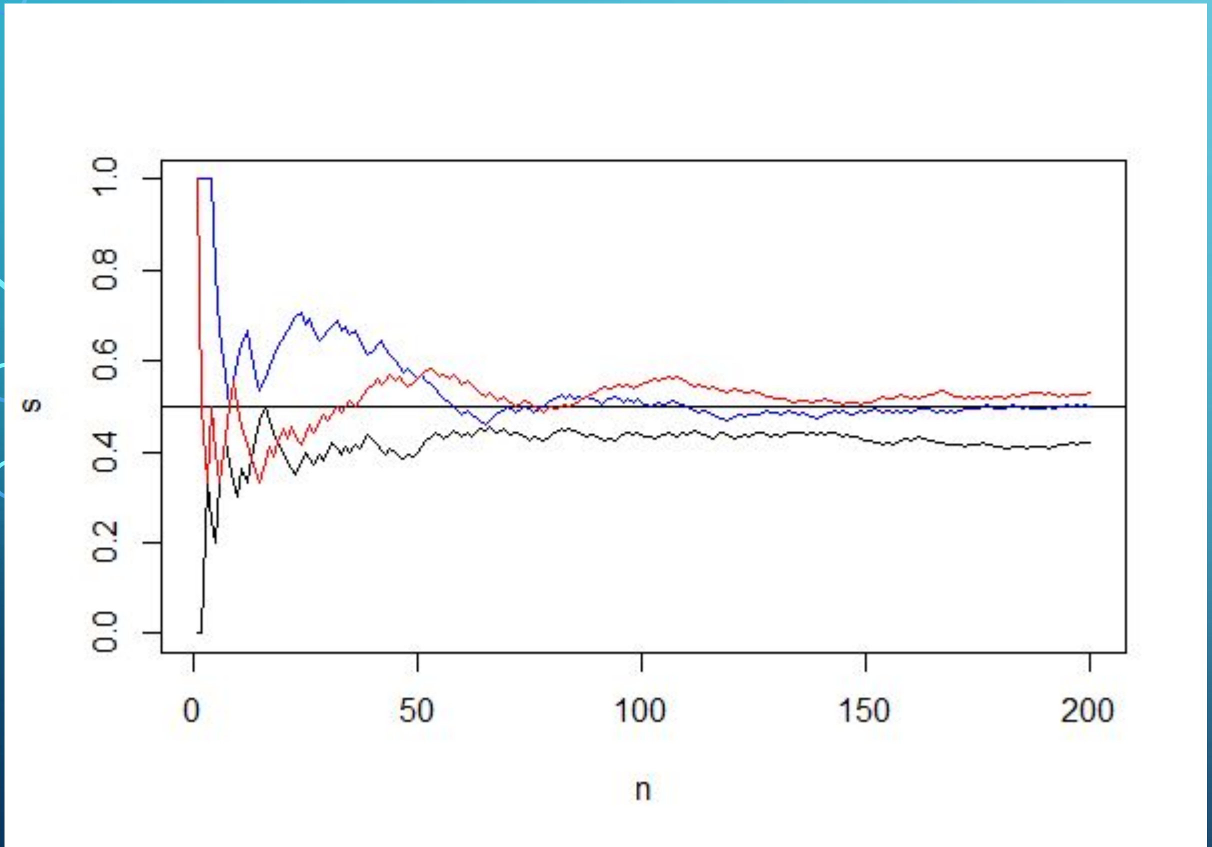
CONVERGÊNCIA QUASE CERTA

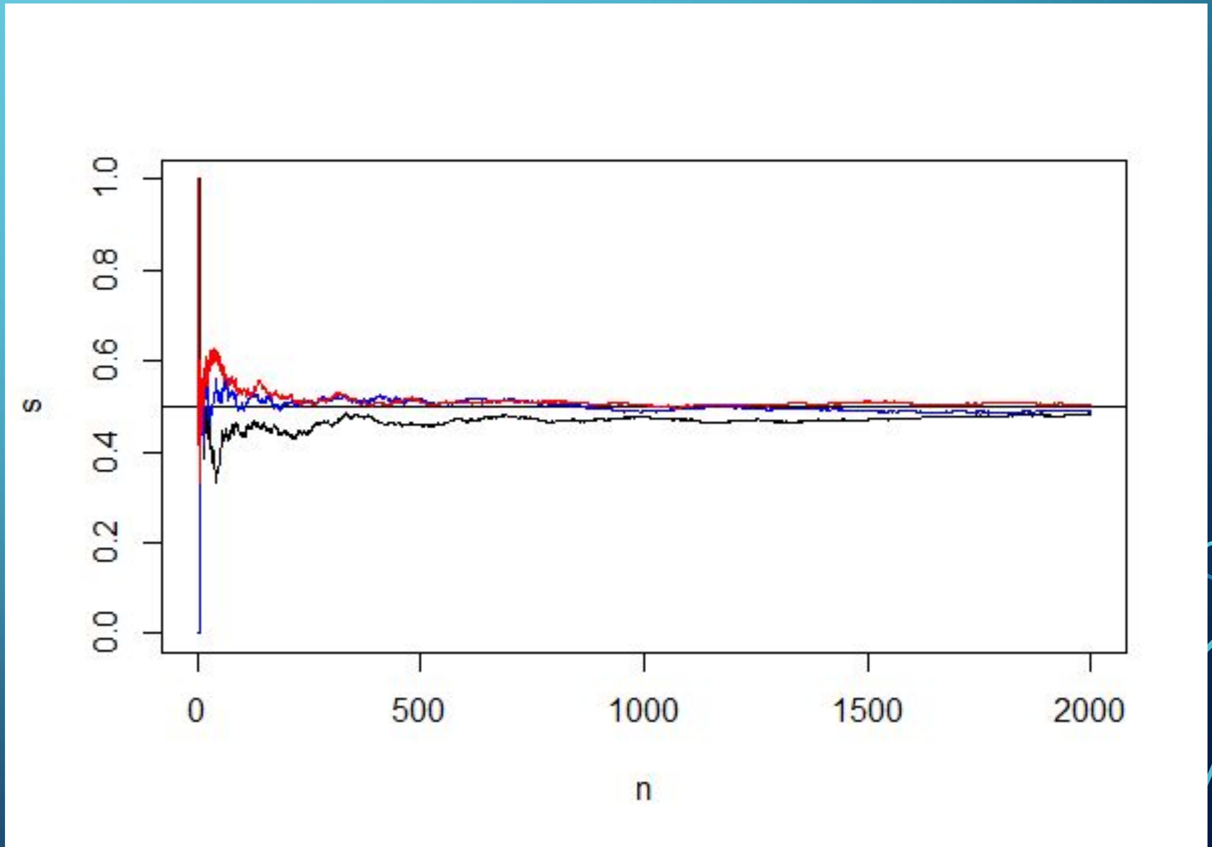
- Pense na sequência de potencialmente infinitos lançamentos da moeda honesta.
- Temos várias sequências onde a proporção de caras não converge para ½ quando n cresce.
- Por exemplo:
  - 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,.....
  - 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,....
  - 0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,....
  - 0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,....

EPPUR SI MUOVE

- Temos infinitas sequências para as quais a proporção de caras não converge para ½
- Todas as sequências são igualmente prováveis.
- Seja A = o conjunto de todas as sequências de 1's e 0's em que a proporção de caras não converge para ½
- Podemos mostrar rigorosamente que P(A) = 0 !!
- A^c = { sequências que convergem para ½ }. Então P(A^c) = 1
- Temos Y_n □ ½ q.c. pois P $\{ \lim_{n\to\infty} Y_n$ □ $1/2 \} = 1$

WAIT JUST A LITTLE BIT LONGER





CONVERGÊNCIA QUASE CERTA

- Almost sure convergence, em inglês
- Deveria ser convergência certa (e não, <u>quase</u> certa)
- Afinal, P { $\lim_{n\to\infty} Y_n$ □ 1/2 } = 1
- Isto é, com probabilidade 1 (com certeza) teremos Y_n □ 1/2
- *Mas e as infinitas sequências em Y_n* não converge para ½?
- *Elas tem medida de probabilidade ZERO. São "poucas demais", um infinitinho perto de todas as sequências possíveis.*

CONVERGÊNCIA EM PROBABILIDADE

- Às vezes, não conseguimos provar que uma sequência aleatória converge quase certamente.
- Podemos provar um resultado mais fraco.
- Fixe um $\epsilon > 0$ e bem pequeno.
- Seja $A_n = \{$ sequências em que $|Y_n - \mu| < \epsilon$ $\}$
- DEFINIÇÃO: Y_n ½ em probabilidade se $\lim_{n \to \infty} P\{ A_n \} = 1$
- A diferença é que o limite passou para “fora” da probabilidade.

CONVERGÊNCIA Q.C. E EM PROBABILIDADE

- Convergência q.c.:
  - $Y_n \rightarrow ½$ q.c. se $P\{ \lim_{n\rightarrow\infty} Y_n \rightarrow 1/2 \} = 1$
- Convergência em probabilidade:
  - $Y_n \rightarrow ½$ em prob. se $\lim_{n\rightarrow\infty} P\{ | Y_n - ½ | < \epsilon\} = 1$
- Se as v.a.'s são i.i.d. então a v.a. $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ converge quase certamente para $\mu = E(X_i)$
- Isto é, com probabilidade 1, teremos $\bar{X} \rightarrow \mu$
- Esta é a <u>Lei Forte dos Grandes Números, difícil de demonstrar</u>

LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS

- Se as v.a.'s são i.i.d. então a v.a. $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ converge EM PROBABILIDADE para $\mu = E(X_i)$
- PROVA: Basta aplicar a desigualdade de Tchebyshev
- Seja $\sigma = SD(X_i)$.
- Temos $E(\bar{X}) = E(X_i) = \mu$ e $Var(\bar{X}) = Var(X_i)/n = \sigma^2/n$
- Então, por Tchebyshev,
- $P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$ quando n cresce
- Portanto, $\bar{X}$ converge EM PROBABILIDADE para $\mu = E(X_i)$

EXEMPLO DAS DUAS CONVERGÊNCIAS

- Se uma sequência converge q.c. então ela converge em probabilidade. O inverso pode não ocorrer

- Consider a sequence $\{X_n\}$ of independent random variables such that
  - $P(X_n = 1) = 1/n$
  - and $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 1/n$.

For $\varepsilon < 1$, we have $P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(X_n = 1) = 1/n$ which converges to 0.

Hence, $X_n \to 0$ in probability.

Since $\sum_n P(X_n = 1) = +\infty$ and the events $\{X_n = 1\}$ are independent, the Borel-Cantelli theorem says that there will be infinite n's such that $X_n = 1$.

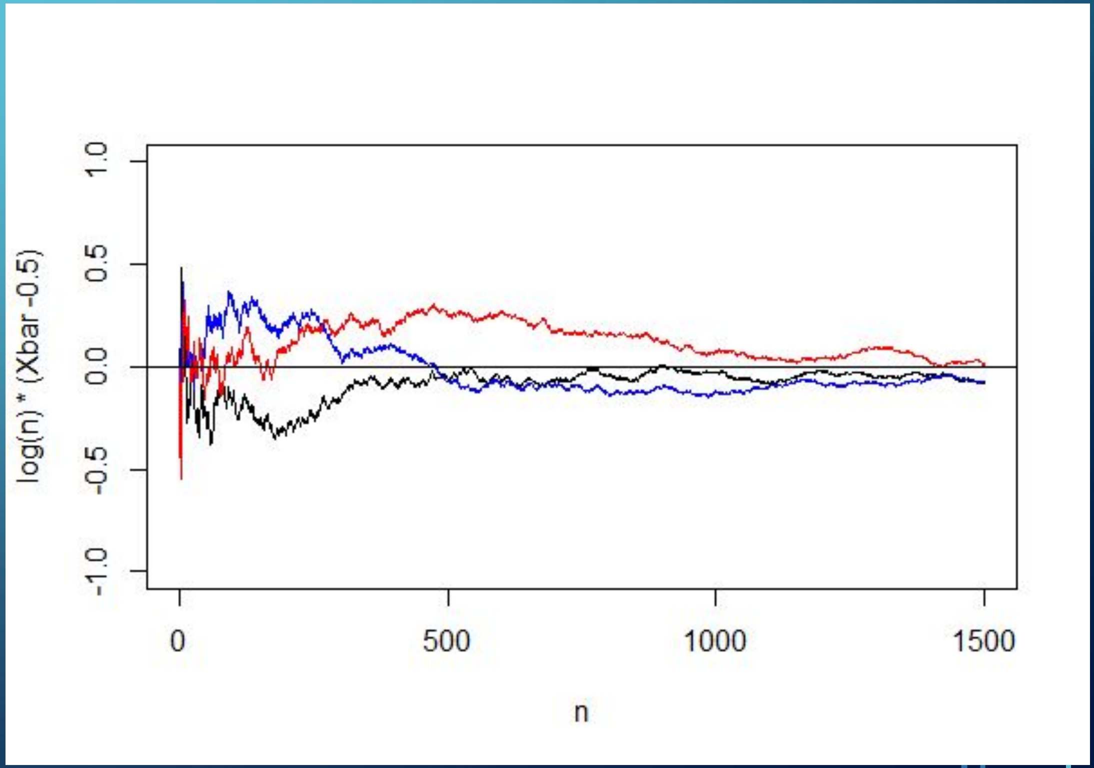
Hence the sequence $\{X_n\}$ doesn't converge to 0 almost surely.

TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

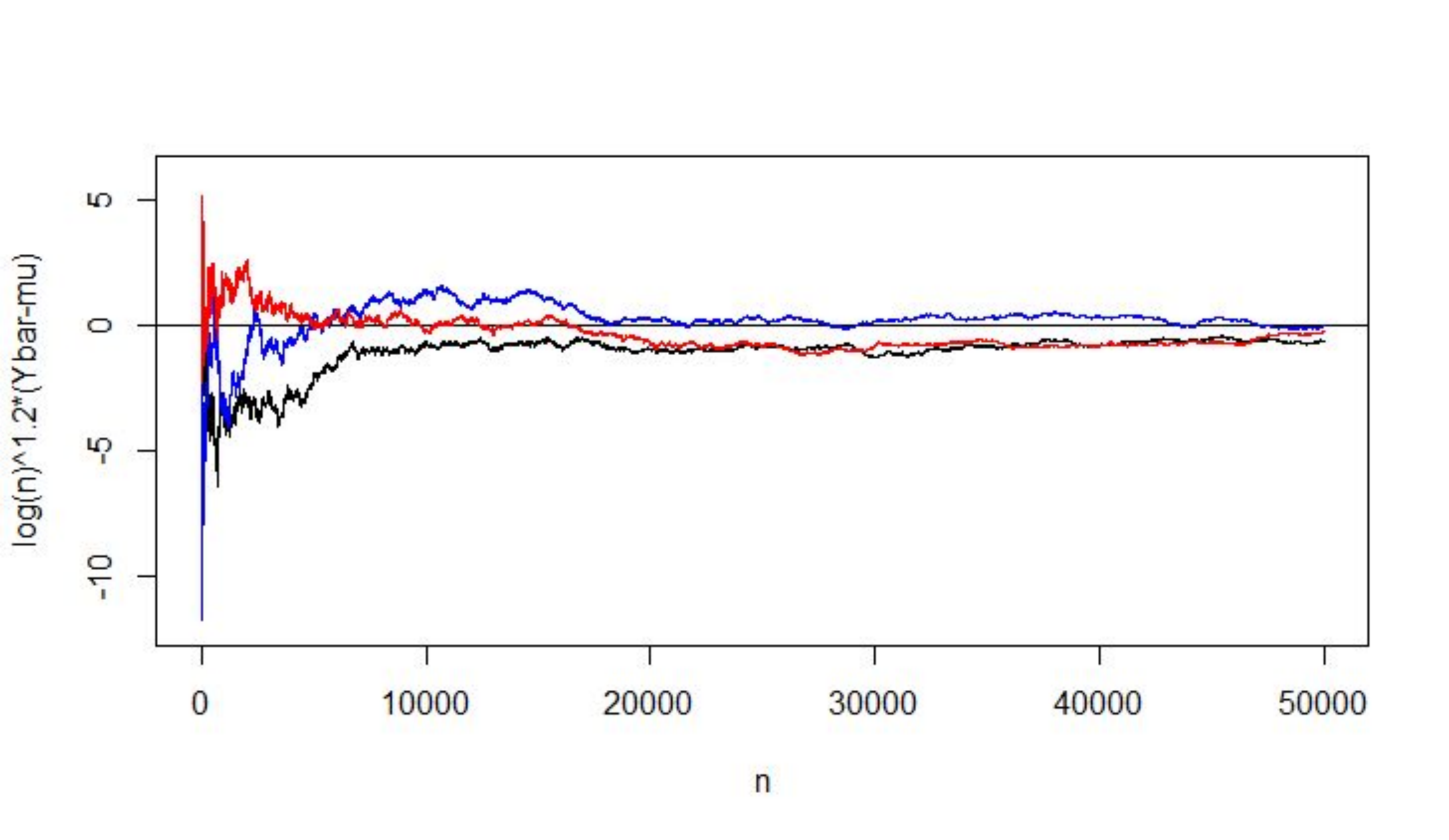
- No caso de v.a.'s i.i.d., com probabilidade 1, teremos $\bar{X} \rightarrow \mu$
- Para um n finito, $\bar{X} \neq \mu$, usualmente.
- Qual o tamanho típico dessa diferença? Qual a distribuição de probabilidade dessa diferença?
- Como $\bar{X} - \mu$ vai para zero, precisamos dar um zoom nesta diferença.
- De volta às moedas: $\bar{X} - 0.5$

TCL

- “Zoom” é ampliar $(\bar{X}-0.5)$ por um fator que envolve n
- O que acontece com g(n) * $(\bar{X}-\mu)$
- Mostra-se que, se multiplicarmos $(\bar{X}-\mu)$ “por menos” que $\sqrt[2]{n}$, teremos g(n) * $(\bar{X}-\mu) \rightarrow 0$.
- Por exemplo:
  - $\log(n)/\sqrt[2]{n} \rightarrow 0$
  - Neste sentido, log(n) é “menor” que $\sqrt[2]{n}$
  - Temos $\log(n) * (\bar{X} - 0.5) \rightarrow 0$



MENOS QUE $\sqrt[2]{n}$ LEVA A ZERO

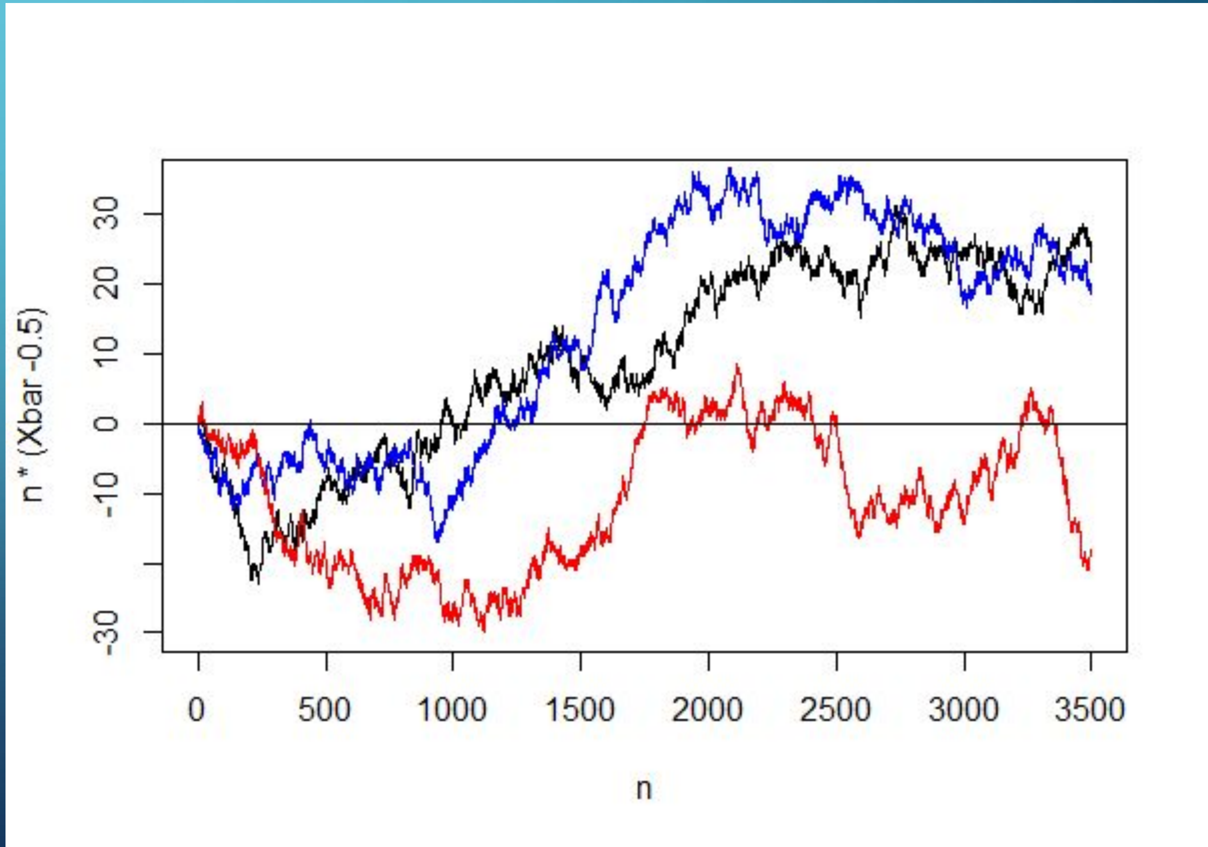


Multiplicando por
log(n)^1.2

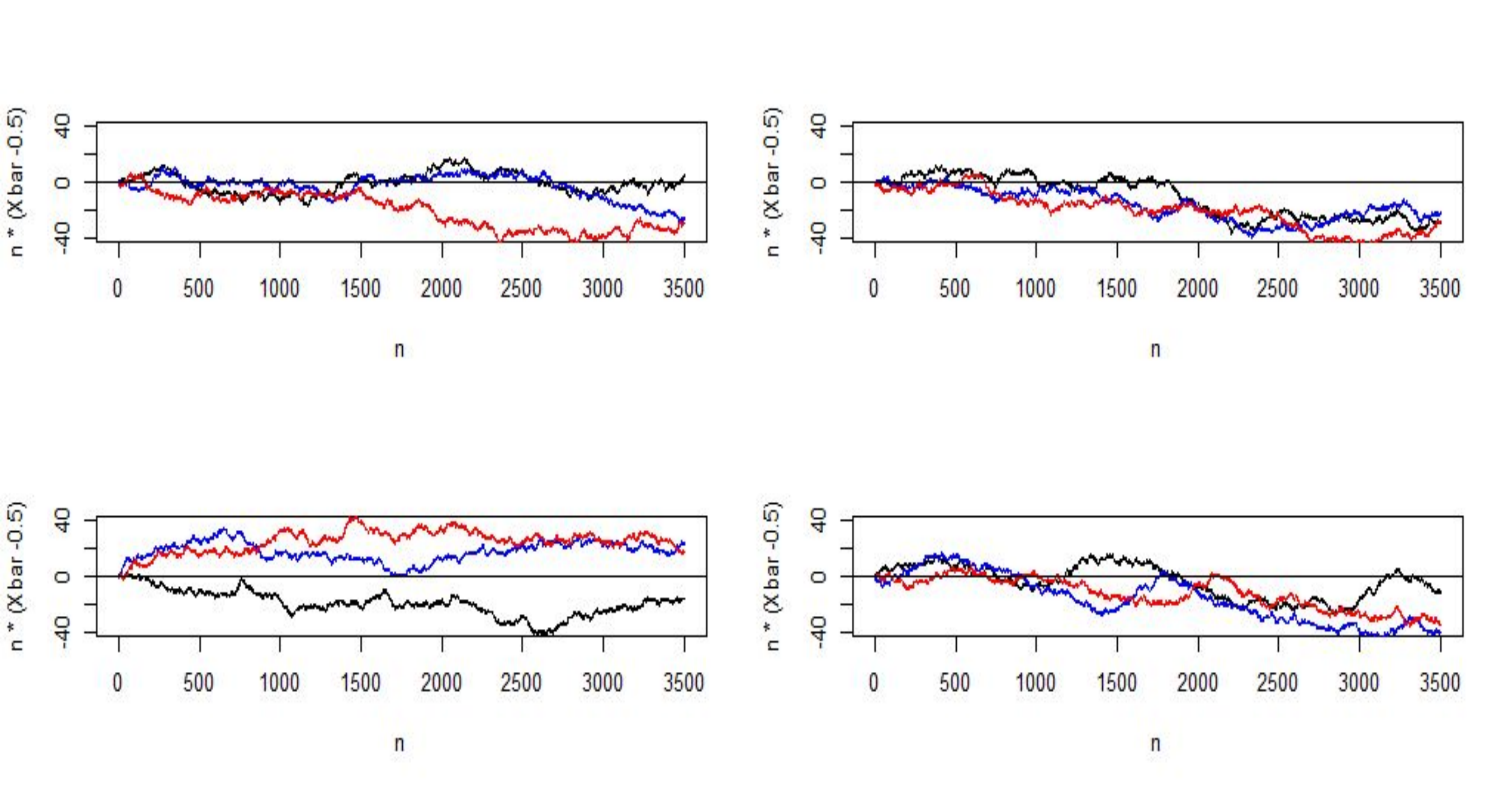
log(n)^2 também
funciona (como nas
moedas) mas demora
Muito para convergir
A zero.

TCL

- Se multiplicarmos $(\bar{X}-\mu)$ "por mais" que $\sqrt[2]{n}$ ...
- teremos que g(n) * $(\bar{X}-\mu)$ não vai convergir para nada
- Por exemplo:
  - $n/\sqrt[2]{n} \to \infty$
  - Neste sentido, n é "maior" que $\sqrt[2]{n}$
  - Temos n * $(\bar{X} - 0.5)$ não converge

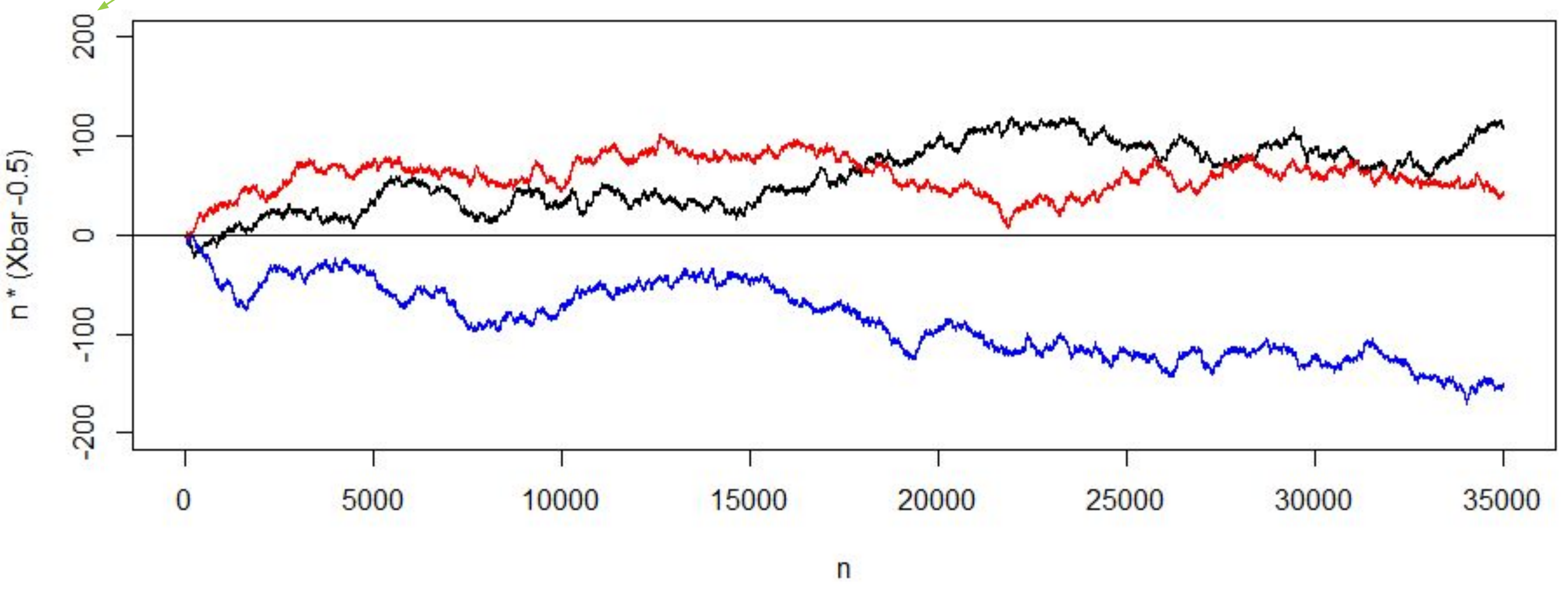


MAIS 4 SIMULAÇÕES DE $n * (\bar{X} - 0.5)$

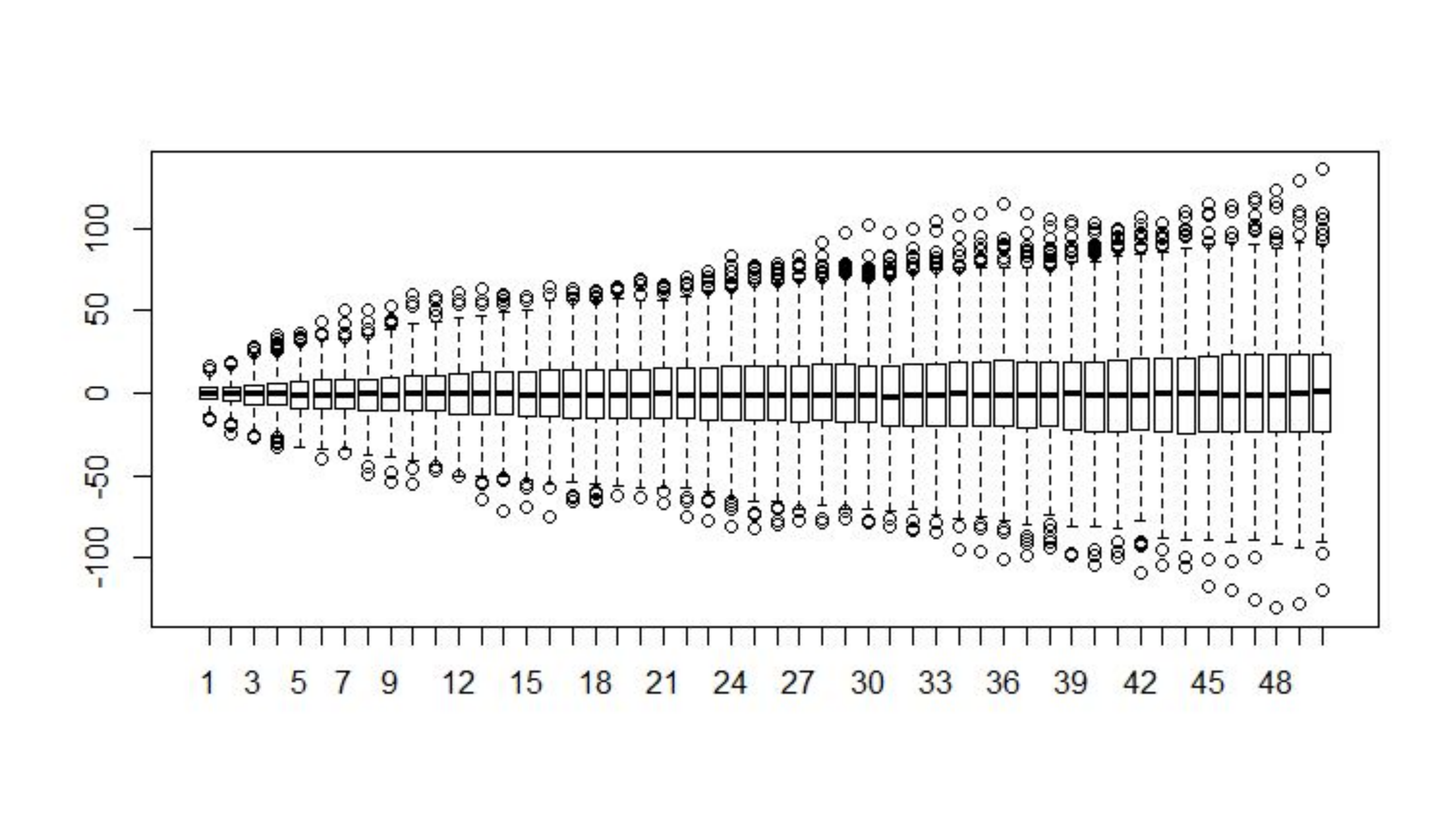


SIMULANDO 35 MIL MOEDAS

Note a escala, de -200 a 200



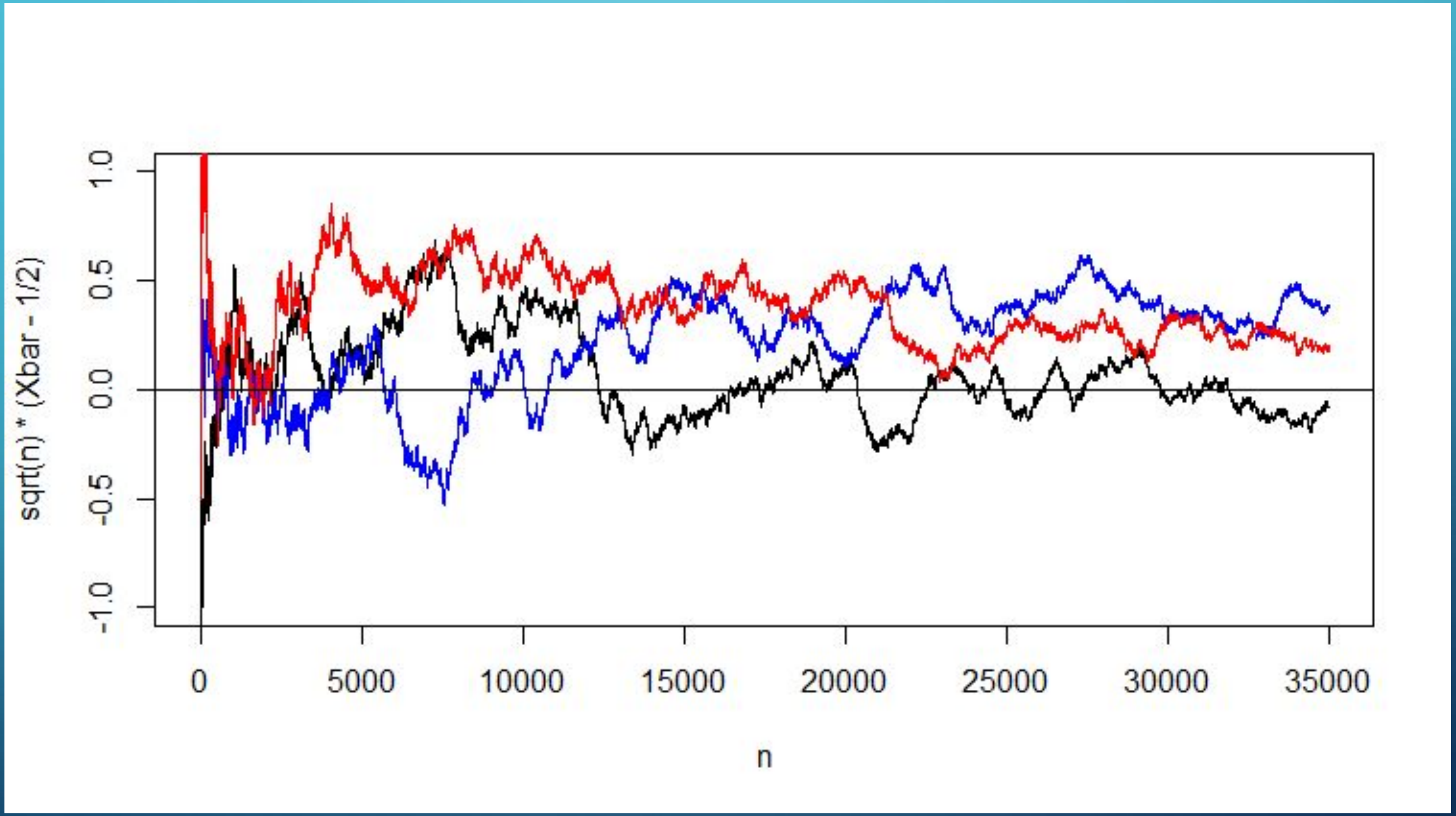
BOXPLOTS DE 5000 SIMULAÇÕES, A CADA 1000*K



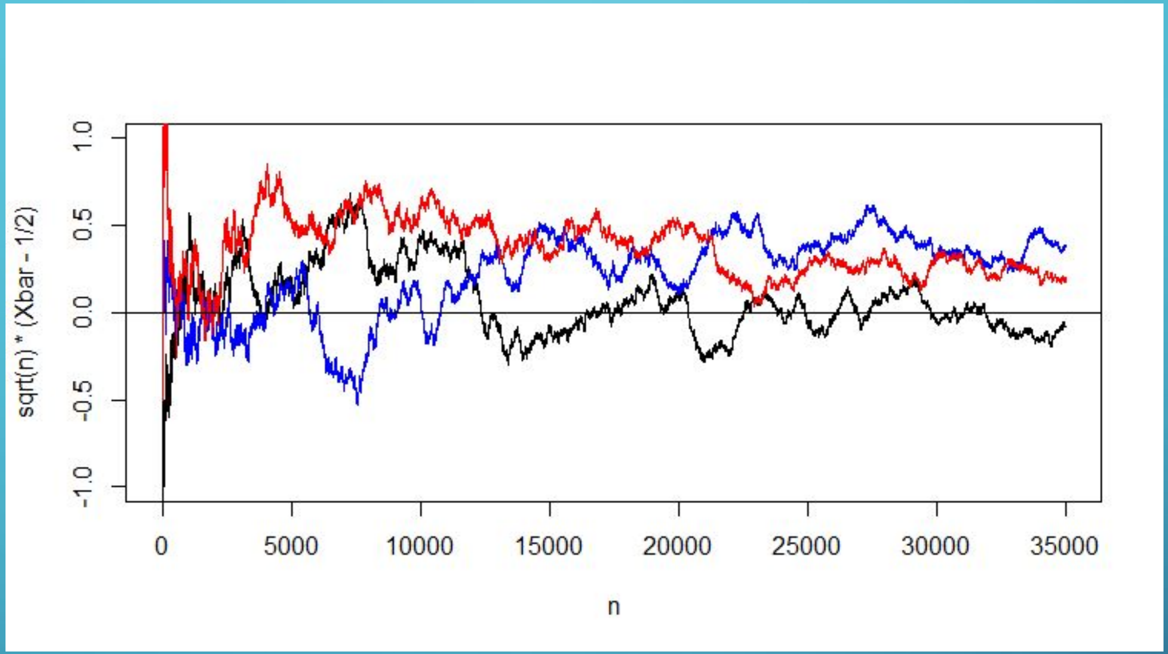
TCL

- $\sqrt[2]{\boldsymbol{n}}\ (\bar{X}-0.5)$ → converge para N(0, $\sigma^2 = ¼$)
- Convergência para uma v.a., não para um valor constante.
- Não podemos prever EXATAMENTE para onde vai $\sqrt[2]{\boldsymbol{n}}\ (\bar{X}-½)$
- Mas podemos prever que:
  - não será muito maior que $2\sigma = 1$
  - não será muito menor que $-2\sigma = -1$
  - terá um formato gaussiano em torno de zero

$\sqrt[2]{n}\,(\bar{X}-0.5) \rightarrow N(0, \sigma^2 = 1/4)$



$\sqrt[2]{n}\,(\bar{X}-0.5) \rightarrow N(0, \sigma^2 = ¼)$



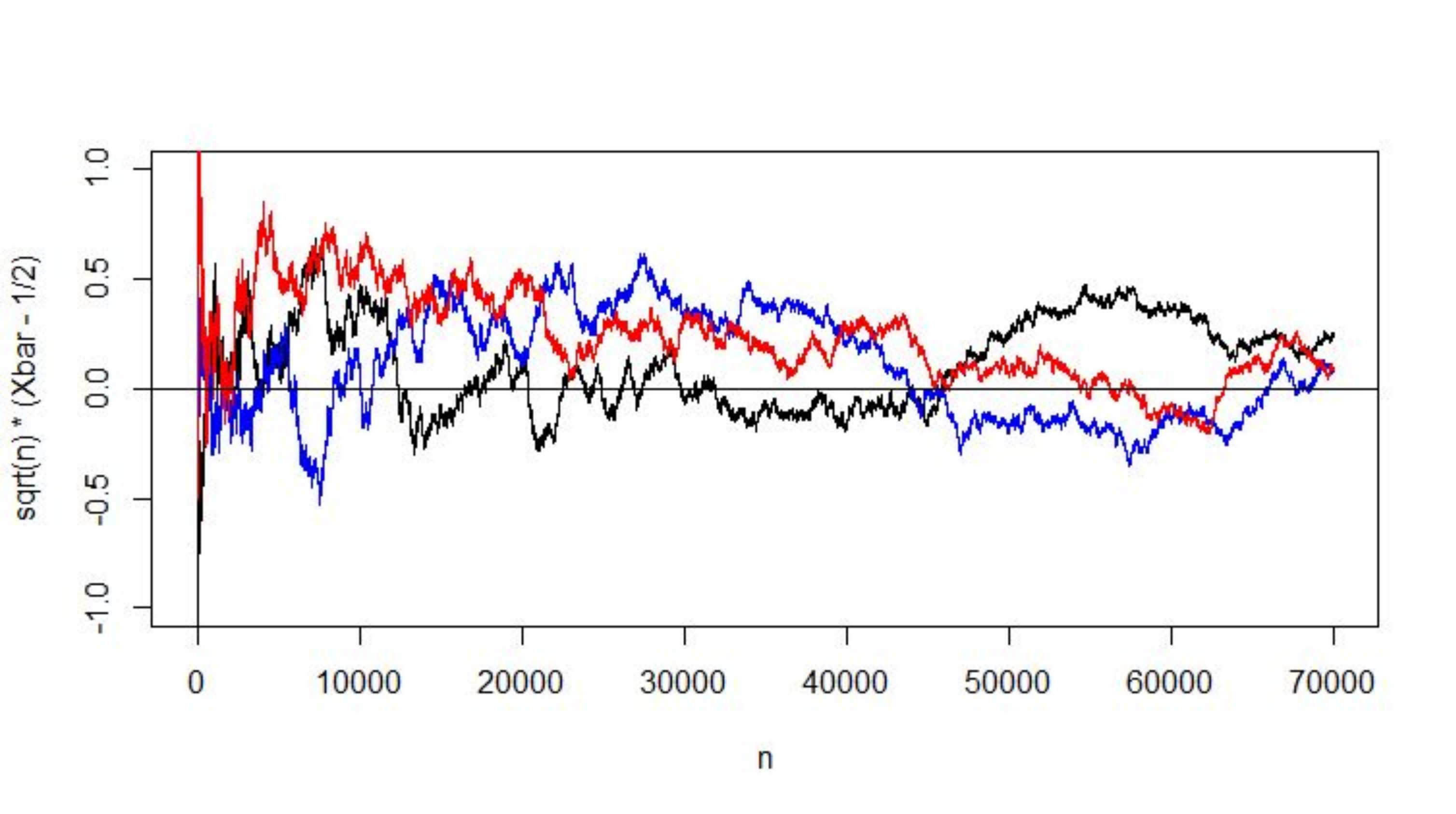
Note como a sequência $\sqrt[2]{n}\,(\bar{X}-0.5)$ não converge para nenhum valor constante.

Cada uma das linhas oscila em torno de zero mas não parece convergir para um valor fixo.

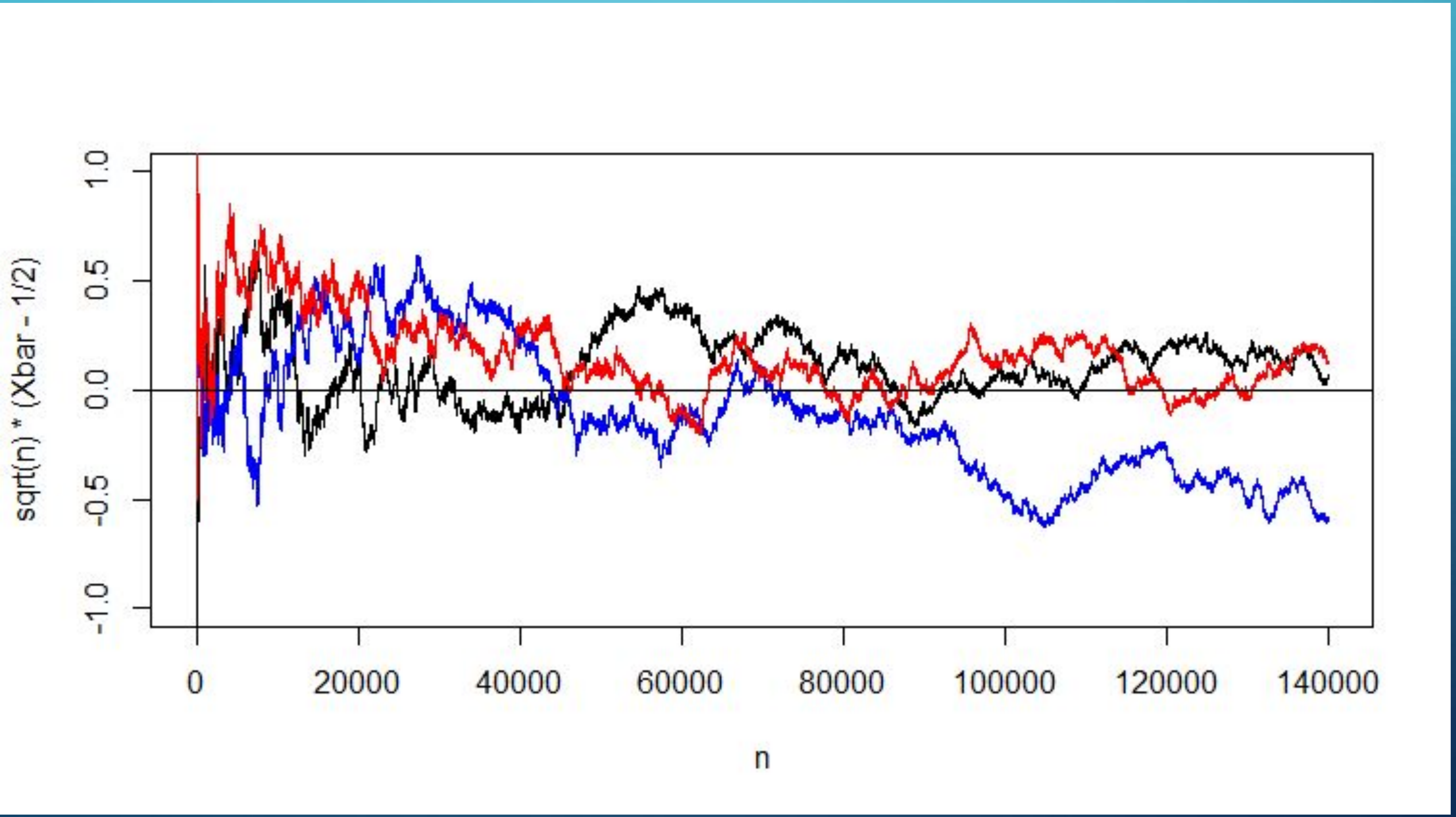
Após 35 mil simulações não sabemos onde cada linha vai parar.

O que acontece se dobrarmos o número de simulações?

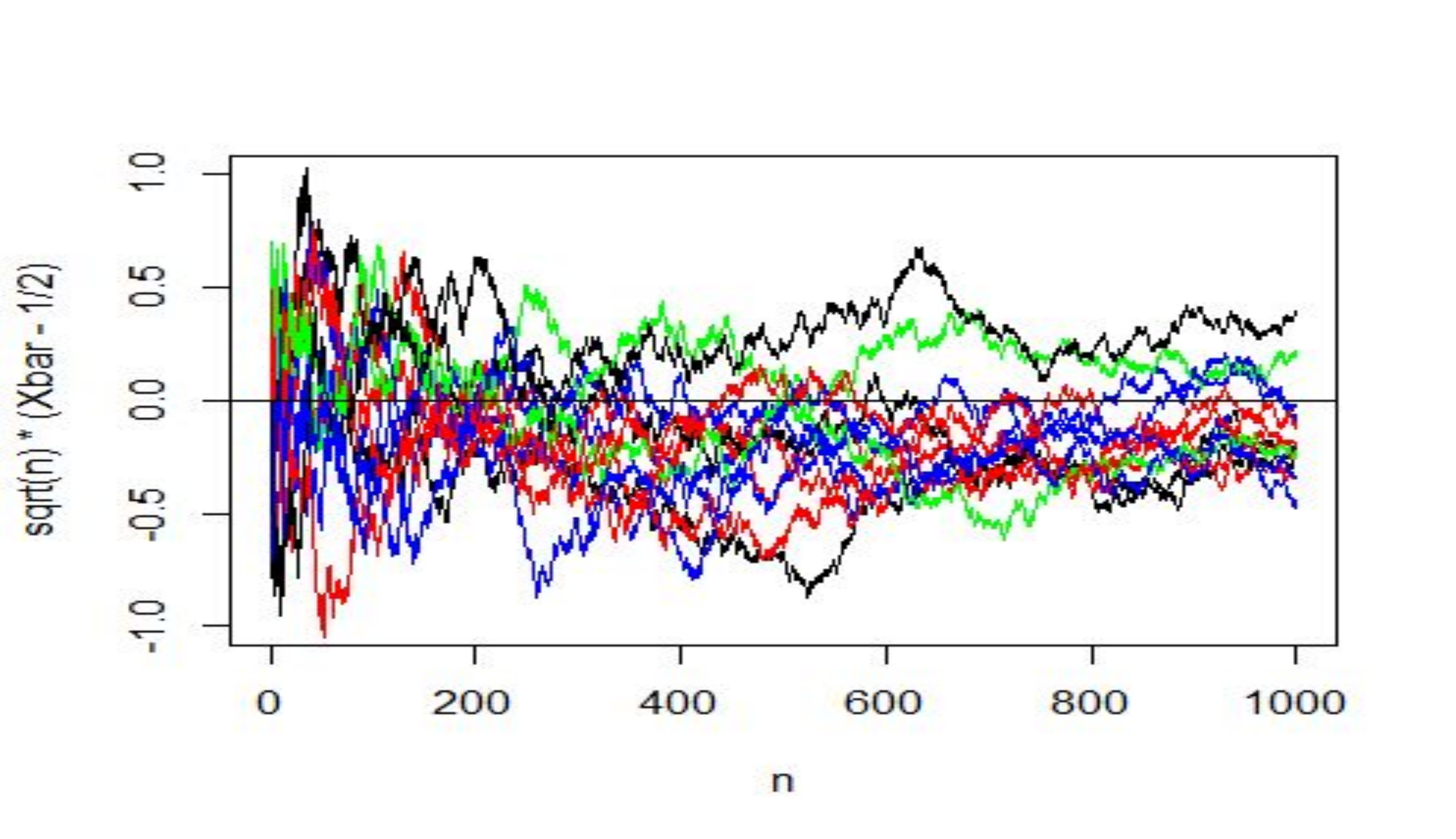
COM 70 MIL LANÇAMENTOS DA MOEDA



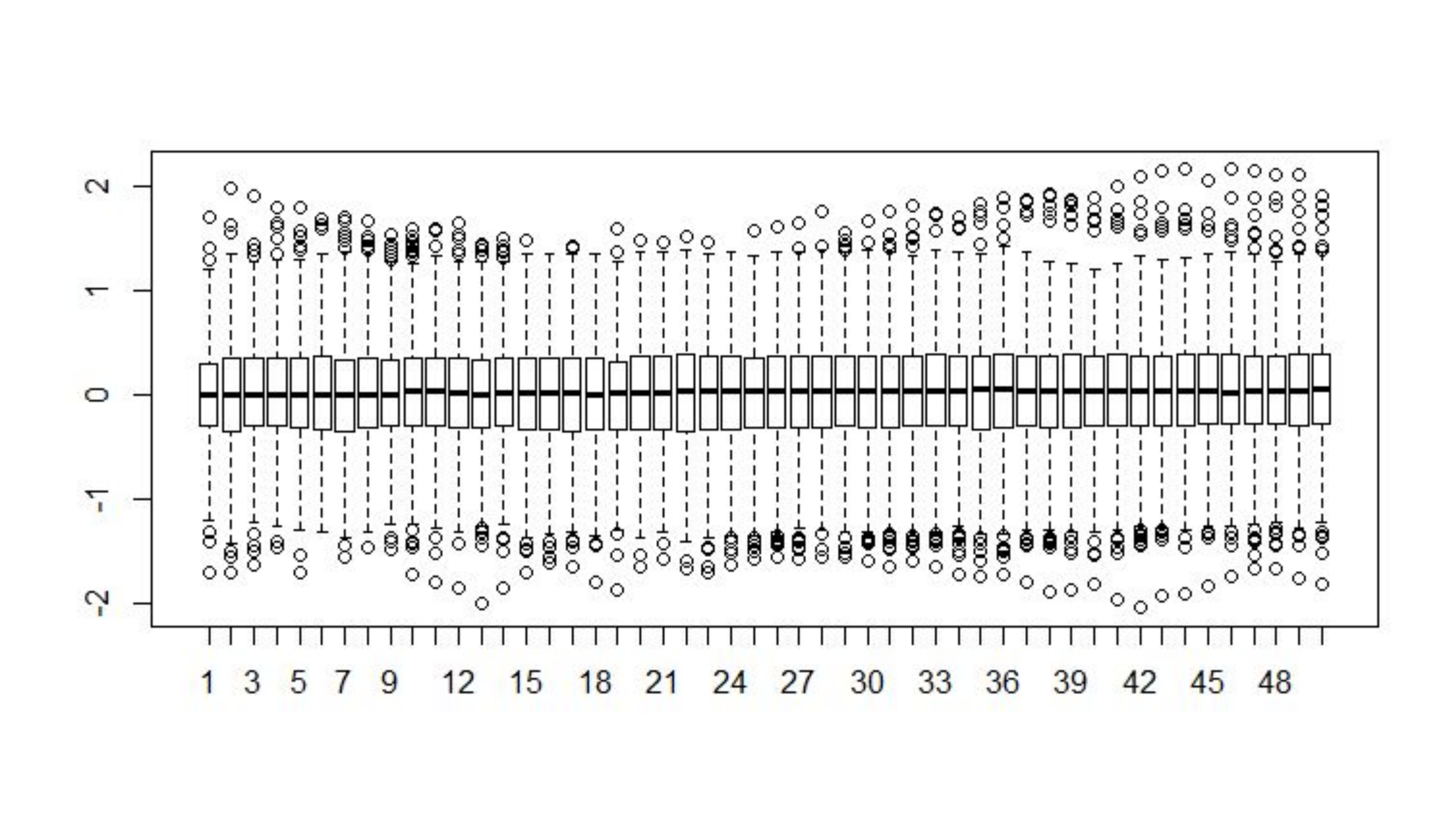
COM 140 MIL LANÇAMENTOS DA MOEDA



SIMULANDO MAIS VEZES, ATÉ n=1000 APENAS



BOXPLOTS DE 5000 SIMULAÇÕES, A CADA 100*K

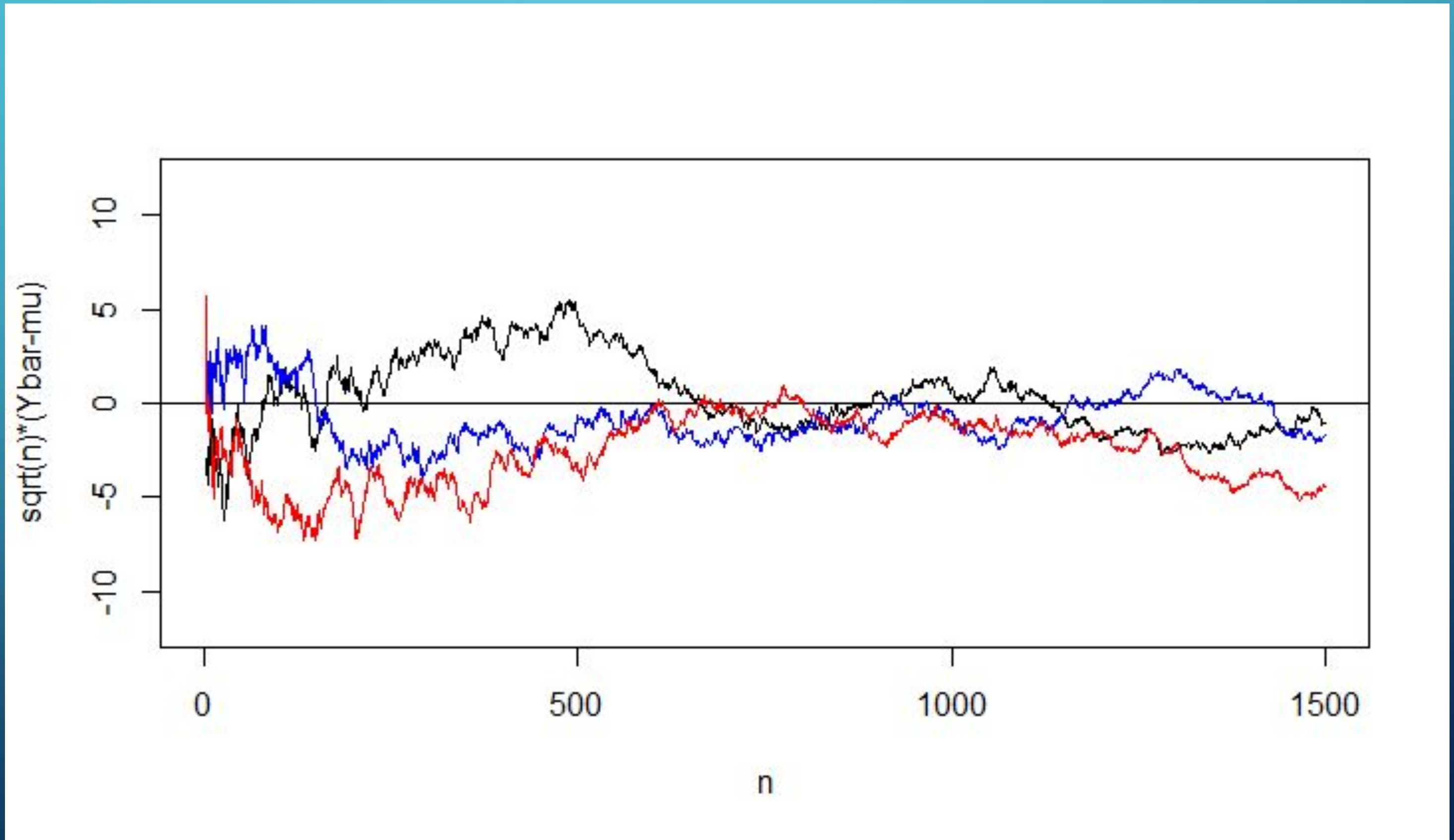


TCL

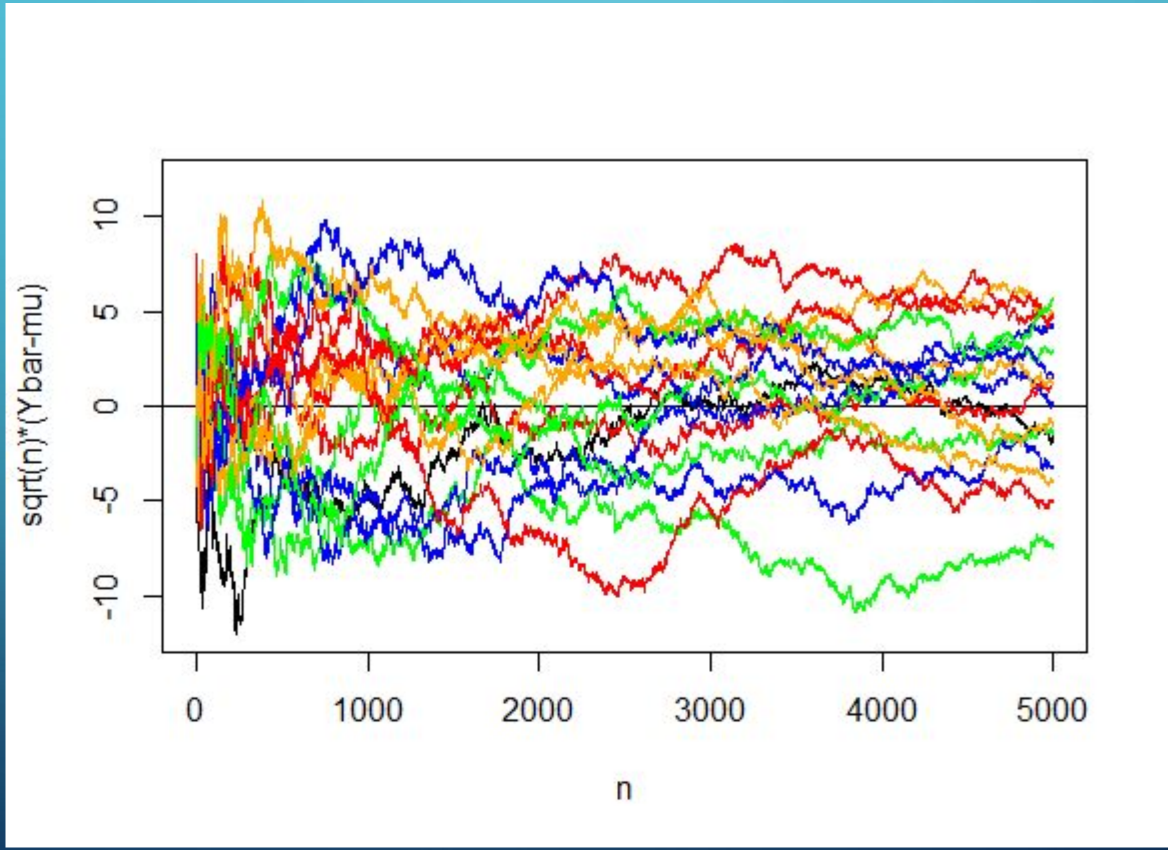
- O TCL é bem geral. Não precisamos lidar apenas com moedas.
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ uma sequência de v.a.s i.i.d. com valor esperado $E(X_i) = \mu$ e variância $Var(X_i) = \sigma^2$
- Então $\sqrt[2]{n} * (\bar{X} - \mu) \rightarrow N(0, \sigma^2)$ em distribuição
- A distribuição de X_i é arbitrária: discreta, contínua, assimétrica ou não.
- A convergência não é para uma constante.
- Pode nem existir convergência da sequência $\sqrt[2]{n} * (\bar{X} - \mu)$
- O que sabemos é que o número aleatório $\sqrt[2]{n} * (\bar{X} - \mu)$ tem uma distribuição (cada vez mais) parecida com uma $N(0, \sigma^2)$

TCL: CASO EM QUE $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

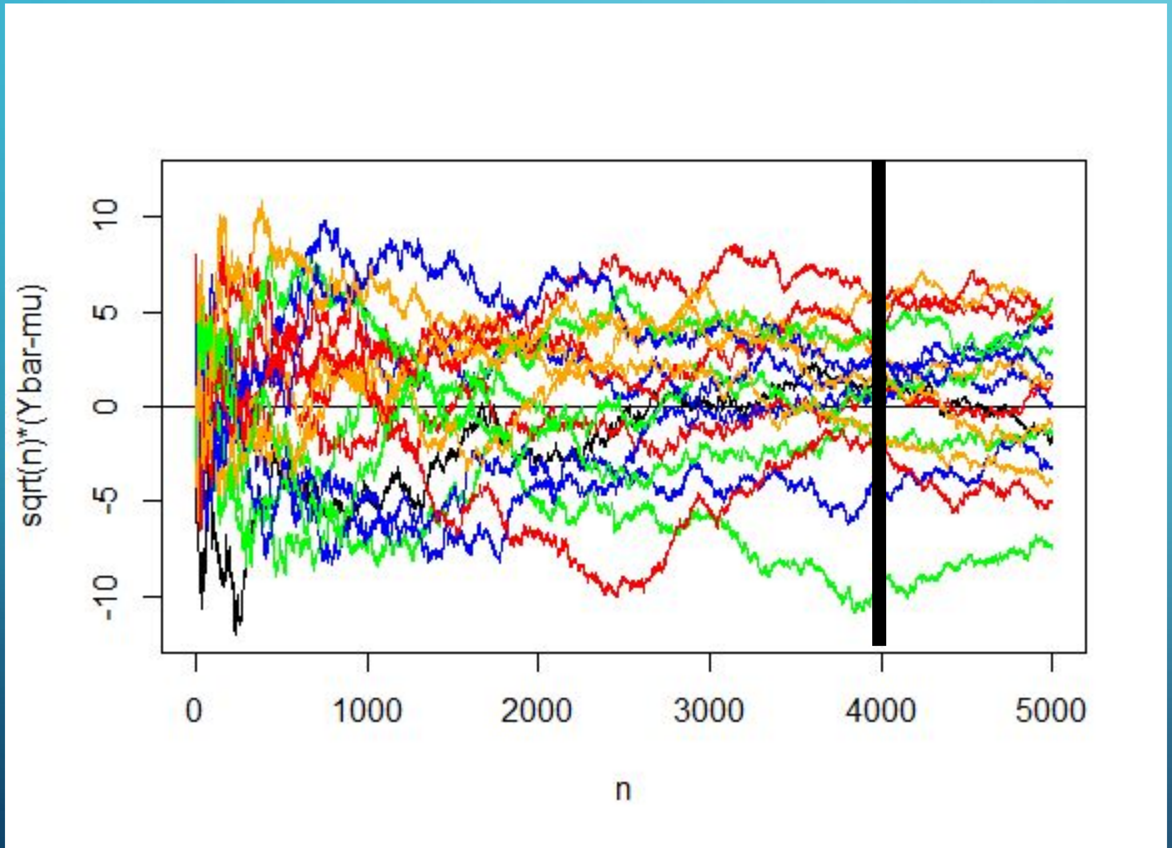
- Seja $X_i \sim N(10, 4^2)$
- Então $\sqrt[2]{n} * (\bar{X} - 10) \rightarrow N(0, 4^2)$



VÁRIAS SIMULAÇÕES



O QUE SIGNIFICA $\sqrt[2]{n} * (\bar{X} - 10) \rightarrow N(0, 4^2)$?



Tome um tempo n qualquer

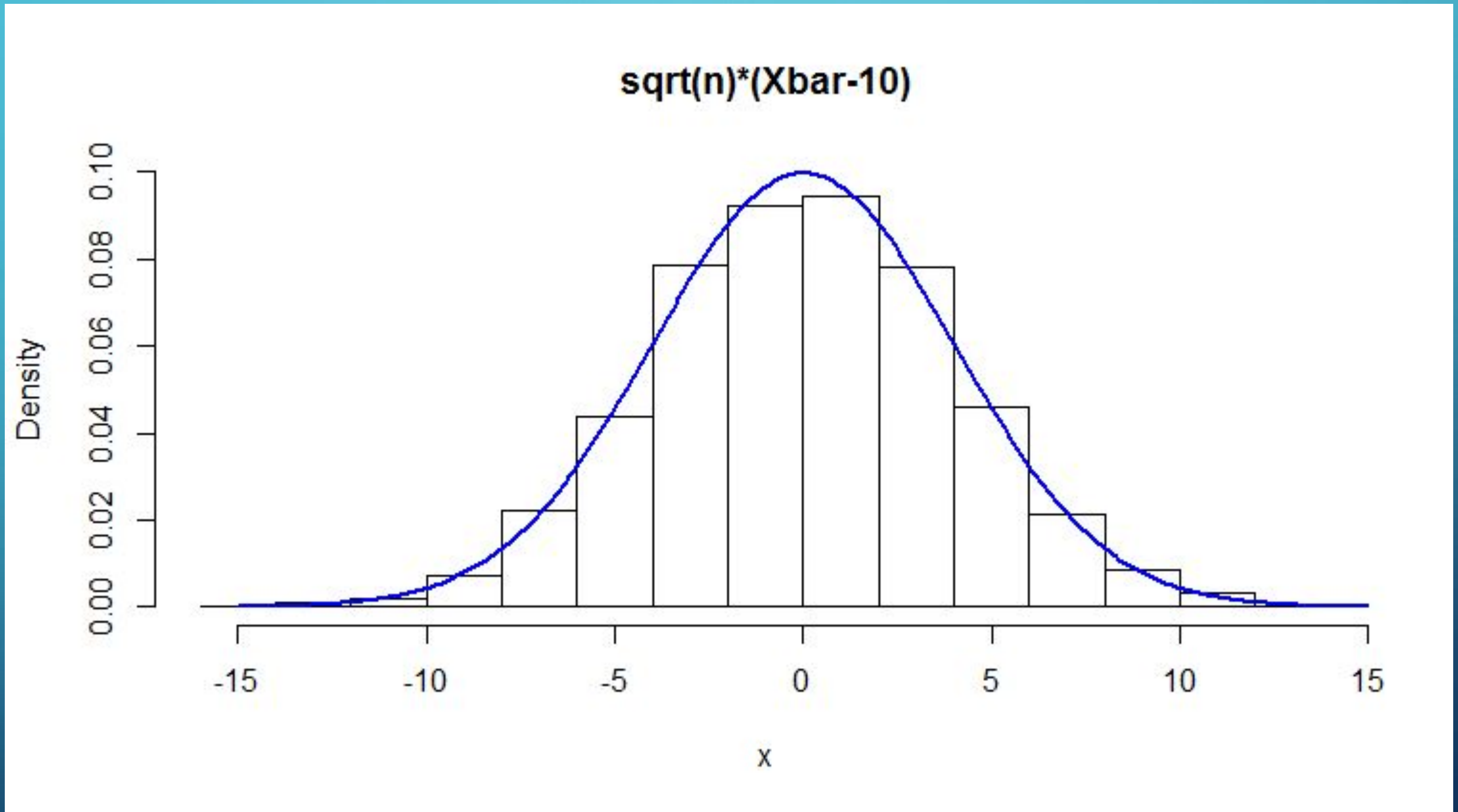
Na figura, n= 4000

Olhe as várias simulações dos caminhos

No tempo n=4000, qual a distribuição dos $\sqrt[2]{4000} * (\bar{X} - 10)$ no eixo vertical ?

Eles seguem uma N(0, 4^2).

HISTOGRAMA, 1000 VALORES DE $\sqrt[2]{4000}*(\bar{X}-10)$



Linha azul: Densidade da $N(0,4^2)$

PROVA DO TCL

- Função geradora de momentos de v.a. X:
  - $M(t) = E(e^{tX})$
  - Caso discreto: $\sum_x e^{tx} P(X = x)$
  - Caso contínuo: $\int e^{tx} f(x) dx$
- Exemplos:
  - Binomial: $(1-p+pe^t)^n$
  - Normal: $\exp(t\mu+\sigma^2 t^2/2)$

EM RESUMO...

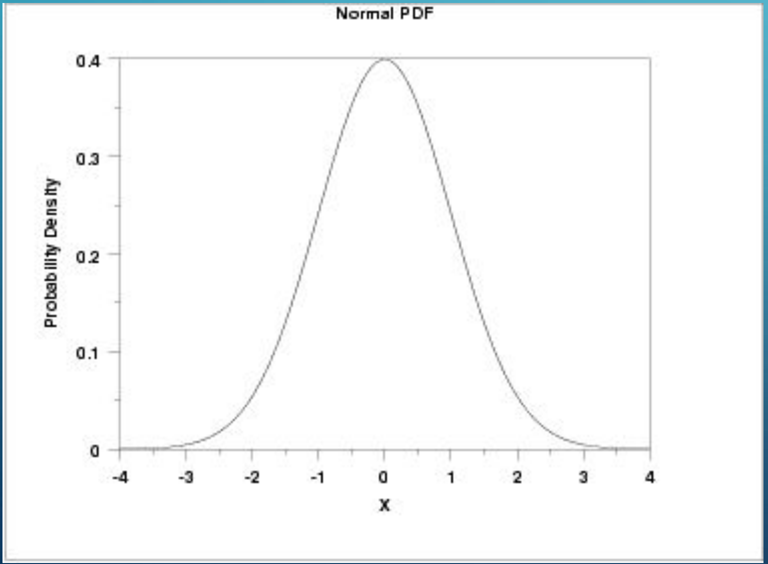
- $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s i.i.d. com $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$
- $\overline{X_n} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$
- DOIS resultados (teoremas limite)
- $\overline{X_n} \rightarrow \mu$ (v.a. $\overline{X_n}$ converge para a constante μ)
  - Lei dos Grandes Números
- $\sqrt[2]{\boldsymbol{n}}\,(\bar{X} - \mu) \rightarrow$ converge para $N(0, \sigma^2)$
  - v.a. $\sqrt[2]{\boldsymbol{n}}\,(\bar{X} - \mu)$ converge para a v.a. $N(0, \sigma^2)$
  - Teorema Central do Limite

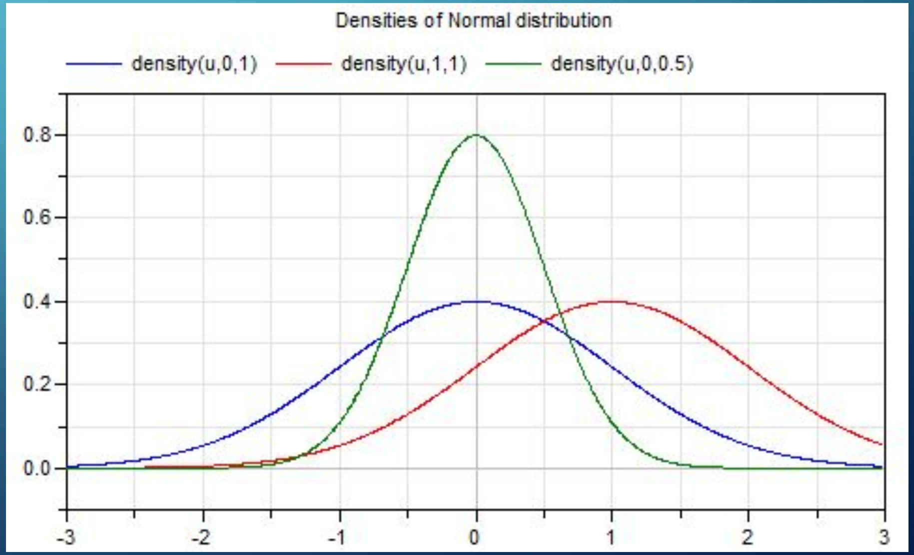
MANIPULAÇÃO SIMPLES

- $\sqrt[2]{n}\,(\bar{X} - \mu) \rightarrow$ converge para $N(0, \sigma^2)$
- $\sqrt[2]{n}\,(\bar{X} - \mu) \,/\, \sigma \rightarrow$ converge para $N(0, 1)$
- $(\bar{X} - \mu) \,/\, \underbrace{(\sigma / \sqrt[2]{n})}_{\text{Standard Error = SD/sqrt(n)}} \rightarrow$ converge para $N(0, 1)$

RELEMBRAR N(0,1)

- Densidade curva de sino
- Centrada em 0
- Área concentrada entre -2 e 2 (≈ 95% da área entre -2 e 2)





TERMINOLOGIA

- O que é central, o limite ou o teorema?
- O teorema é central, está no centro dos principais resultados de probab.
- O limite não "centra" nada.
- Var($\overline{X_n}$) $= \sigma^2$/n
- Standard Error $= \sigma/\sqrt[2]{\boldsymbol{n}}$
- Distribuição da v.a. $\overline{X_n}$ = "sampling distribution"

USOS DO TCL

Sampling distribution of serum cholesterol

- According the National Center for Health Statistics, the distribution of serum cholesterol levels for 20- to 74-year-old males living in the United States has mean 211 mg/dl, and a standard deviation of 46 mg/dl
- We are planning to collect a sample of 25 individuals and measure their cholesterol levels
- What is the probability that our sample average will be above 230?

$P(\bar{X} > 230) = ??$

- A distribuição do colesterol INDIVIDUAL não precisa ser gaussiana. Ela segue uma distribuição contínua arbitrária.
- X_i = colesterol do indivíduo i
- Temos $E(X_i) = \mu = 211$
- $Var(X_i) = \sigma^2 = 46^2$ → SD = 46
- $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s i.i.d. com $E(X_i) = 211$ e $Var(X_i) = \sigma^2 = 46^2$
- Queremos $P(\bar{X} > 230) = ??$

$P(\bar{X} > 230) = ??$

- Usar TCL. Sabemos que
- $\sqrt[2]{n}\,(\bar{X} - \mu) \rightarrow$ converge para $N(0, \sigma^2)$
- OU AINDA $(\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt[2]{n}) \approx N(0, 1)$
- Truque: manipular $\bar{X}$ em $P(\bar{X} > 230)$ até que $(\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt[2]{n})$ apareça
- Manipular SEM ALTERAR O EVENTO $\bar{X} > 230$

P($\bar{X}$ > 230) = ??

- n=25, μ = 211 e $\sigma^2 = 46^2$

- $P(\bar{X} > 230) = P(\bar{X} - 211 > 230 - 211)$

- $P\left((\bar{X} - 211)/(46/\sqrt[2]{25}) > (230-211)/(46/\sqrt[2]{25}) \right)$
- Isto é,
- $P(\bar{X} > 230) = P\left(\underbrace{(\bar{X} - 211)/(46/\sqrt[2]{25})}_{\approx N(0,1)} > 2.065 \right)$

P($\bar{X}$ > 230) = ??

-

- P($\bar{X}$ > 230) = P(($\bar{X}$ -211)/(46/$\sqrt[2]{25}$) > 2.065) = P(Z > 2.065)
- Com Z ~ N(0,1), usamos o comando pnorm no R:
- pnorm(2.065) = 0.9805385 = P(Z <= 2.065)
- Portanto, P(Z > 2.065) = 1 – pnorm(2.065) = 0.0194615
-

OUTRO EXEMPLO TÍPICO

- X_i = colesterol do indivíduo i
- Temos $E(X_i) = \mu = ??$
- $Var(X_i) = \sigma^2 = 46^2 \rightarrow SD = 46$
- $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s i.i.d. com $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2 = 46^2$
- Queremos estimar μ com base em $\bar{X}$
- Mas sabemos que $\mu \neq \bar{X}$ embora devam ser próximos se n é grande
- E então? Vamos usar um interval centrado em $\bar{X}$ da forma $[\bar{X} - d, \bar{X} + d]$

INTERVALO PARA COBRIR MU

- Intervalo [$\bar{X}$ - d, $\bar{X}$ + d]
- d é a "margem de erro", um valor positive que leva em conta que $\mu \neq \bar{X}$
- Que leva em conta que $\bar{X}$ é apenas uma proximação para μ
- Que uma segunda amostra da mesma população deve gerar um valor diferente para a média aritmética $\bar{X}$
- Como estabelecer um valor para d?

USAMOS O TCL

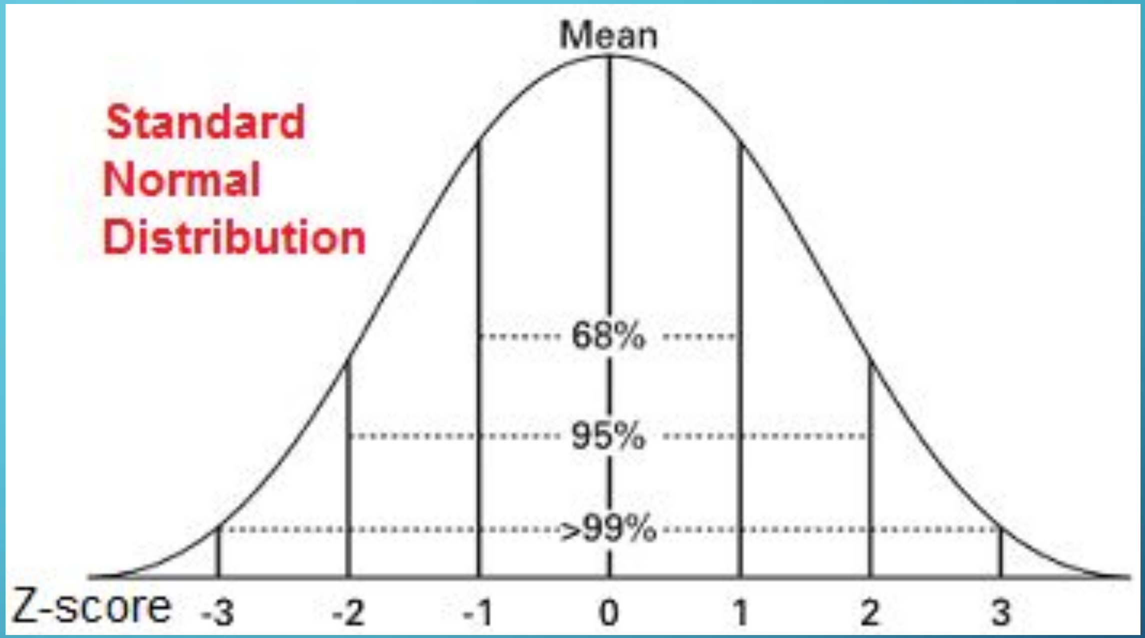
- $\sqrt[2]{n}\,(\bar{X} - \mu) \rightarrow$ converge para $N(0, \sigma^2)$
  - Ou $(\bar{X} - \mu) \approx N(0, \sigma^2/n)$
  - Ou $\bar{X} \approx N(\mu\ , \sigma^2/n)$
  - Isto é, $\bar{X}$ oscila em torno de μ
  - O tamanho médio desse desvio é $\sigma/\sqrt[2]{n}$
- Queremos que o intervalo $[\bar{X} - d, \bar{X} + d]$ cobra o verdadeiro valor de μ mas este valor é desconhecido.
- Se tomarmos d = no. gigante teremos cobertura quase certa mas um intervalo enorme.
- Se tomarmos d muito pequeno o intervalo pode não cobrir μ quase nunca.

- A ideia é calibrar d de modo que ele seja pequeno mas que tenha uma boa garantia de cobrir μ
- Vamos fixar uma garantia probabilística grande: 0.95 (ou 95%)
- Esta "garantia" é chamada de "confiança"
- Queremos achar d de forma que P (μ € [$\bar{X}$- d, $\bar{X}$ + d]) = 0.95
- Queremos que o evento [μ € [$\bar{X}$- d, $\bar{X}$ + d]] ocorra com probabilidade 0.95
- Assim, às vezes, o intervalo pode não cobrir μ
- Isto vai ocorre 5% das vezes que o intervalo for construído.
- Podemos aumentar a confiança para 99%? Sim mas vai haver um custo (mais tarde)

- [μ € [$\bar{X}$- d, $\bar{X}$ + d]] se, e somente se
- | μ - $\bar{X}$ | < d e isto ocorre se, e somente se,
- -d < μ - $\bar{X}$ < d
- $\bar{X}$ -d < μ < $\bar{X}$ + d

- Quem é d ?
- Queremos d de forma que P (μ € [$\bar{X}$- d, $\bar{X}$ + d]) = 0.95
- Ou seja, de forma que
- que P ($\bar{X}$ -d < μ < $\bar{X}$ + d) = 0.95

- Temos $(\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt[2]{n}) \approx N(0, 1)$
- Densidade Gaussiana N(0,1)



- Temos $P(-1.96 < N(0,1) < 1.96) = 0.95$
- Então $P(-1.96 < (\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt[2]{n}) < 1.96) \approx 0.95$
- Ou seja, $P(-1.96 (\sigma / \sqrt[2]{n}) < (\bar{X} - \mu) < 1.96 (\sigma / \sqrt[2]{n})) \approx 0.95$
- Ou $P(\bar{X} - 1.96 (\sigma / \sqrt[2]{n}) < \mu < \bar{X} + 1.96 (\sigma / \sqrt[2]{n})) \approx 0.95$

- P($\bar{X}$ -1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$) < μ < $\bar{X}$ + 1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$)) ≈ 0.95
- Descobrimos que o intervalo ALEATÓRIO
- [$\bar{X}$ -1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$) , $\bar{X}$ + 1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$)]
- Cobre μ com probabilidade 0.95
- Quer mais garantia (ou mais confiança)?
- Por exemplo, quer trocar 0.95 por 0.99?
- Então, a constante 1.96 deve ser trocada por 2.58
- Teremos mais garantia mas o intervalo será maior → garantia tem um custo

TAMANHO DE AMOSTRA

- Qual o tamanho de amostra n para que o intervalo de confiança de 95% tenha um comprimento de 10 unidades?
- Isto é, quero o intervalo com d=10 de forma que $[\bar{X} - 10 \ , \bar{X} + 10]$
- Cubra μ com probabilidade 0.95
- Devemos fazer 1.96 $(\sigma / \sqrt[2]{n})$ = 10 → n = (1.96 * σ/ 10)^2
- Mas todos estes cálculos dependem de conhecer σ
- Se estamos incertos e queremos estimar μ como podemos conhecer σ?

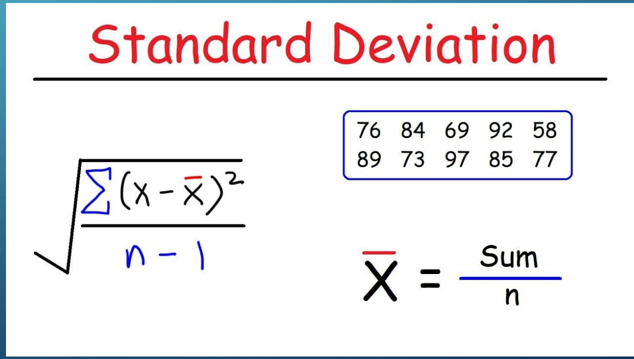
SOLUÇÕES

- Podemos usar um valor chutado que a gente saiba que é MAIOR que σ
- Deduzimos que P($\bar{X}$ -1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$) < μ < $\bar{X}$ + 1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$)) ≈ 0.95
- Seja M > σ
- Se o evento $\bar{X}$ -1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$) < μ < $\bar{X}$ + 1.96 (σ/ $\sqrt[2]{n}$) ocorrer ENTÃO
- O evento $\bar{X}$ -1.96 (M/ $\sqrt[2]{n}$) < μ < $\bar{X}$ + 1.96 (M/ $\sqrt[2]{n}$) tem de ocorrer

- Assim, P($\bar{X}$ -1.96 (M/ $\sqrt[2]{n}$) < μ < $\bar{X}$ + 1.96 (M/ $\sqrt[2]{n}$)) > 0.95
- Isto é, o intervalo com M terá garantia maior que 95%

OUTRA SOLUÇÃO

- Muitas vezes, n é determinado pelos recursos que você tem.
- Ao invés de estabelecer o n mínimo que garanta um intervalo com margem desejada, usamos os recursos que temos para extrair uma amostra. Seja o que Deus quiser.
- Neste caso, o intervalo $[\bar{X}$ -1.96 $(\sigma/\sqrt[2]{n})$, $\bar{X}$ + 1.96 $(\sigma/\sqrt[2]{n})$]
- É substituído por $[\bar{X}$ -1.96 $(S/\sqrt[2]{n})$, $\bar{X}$ + 1.96 $(S/\sqrt[2]{n})$]
- Onde S é o desvio-padrão amostral



EFEITO DE SUBSTITUIR

- Mas $S \neq \sigma$
- Não estamos introduzindo mais incerteza, mais erros amostrais?
- Por quê a aproximação do TCL e o intervalo com S ainda tem garantia 0.95?
- História: “Student”, Fisher, etc
- Se n é grande ignore a substituição.
- O que é “n grande”? Na prática, se $n > 50$, costuma estar ok.
- E para o cálculo de n? Podemos usar uma amostra inicial com $n=50$ ou $n=100$ para obter S e substituir na fórmula anterior $n = (1.96 * S/ 10)^2$