2^a Prova - FECD B - 2013/02

Renato Assunção

Suponha que $Y_1, \ldots, Y_n$ forme uma amostra aleatória de v.a.'s i.i.d. com a seguintes densidade de probabilidade (caso contínuo): $f(y;\theta) = \theta e^{-\theta y}$ para $y > 0$ com $\theta \in (0, \infty)$ (densidade exponencial, contínua). Temos $\mathbb{E}(Y_i) = 1/\theta$ e $\mathbb{V}(Y_i) = 1/\theta^2$.

1. Encontre o MLE de θ.
2. Encontre a função score deste problema. Lembre-se que a função score é aleatória.
3. Mostre que o valor esperado da função score é zero.
4. Obtenha a derivada segunda da log-verossimilhança.
5. Sabendo que a equação iterativa de Newton-Raphson é $\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right)^{-1} \frac{\partial \ell}{\partial \theta}$, use o valor inicial $\theta^{(0)} = 1$ para uma amostra de $n = 10$ elementos com $\sum_i y_i = 6.8$ para encontrar $\theta^{(1)}$.
6. Obtenha a informação de Fisher.

Suponha que queremos estimar θ e usamos um estimador $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ que tem esperança $\mathbb{E}(\hat{\theta}(\mathbf{Y})) = \mu$. Responda:

7. Qual a condição que devemos ter para que $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ seja um estimador não-viciado para estimar θ?
8. Se $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ for não-viciado para estimar θ, sabemos que devemos ter a sua variãncia $\mathbb{V}\left(\hat{\theta}(\mathbf{Y})\right)$ maior que L. Quem é L?
9. O MSE $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta\right)^2$ pode ser decomposto em dois termos positrivos. Escreva esta decomposição.
10. Prove a decomposição acima somando e subtraindo μ dentro do parênteses e expandindo o quadrado em $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta\right)^2$.