Departamento de Ciência da Computação
D C C

Cálculo da integral definida no intervalo [0,1] de funções transcendentes

André Luiz de Senna
Wagner Meira Jr.

Março - 1998

U F M G
Universidade Federal de Minas Gerais

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é avaliar o comportamento do método de Monte Carlo [1] para o cálculo de integrais definidas θ no intervalo [0,1]:

$$\theta = \int_0^1 g(x)\, dx$$

sendo que $g(x)$ é um função integrável em x.

Será utilizado o método de Monte Carlo devido a sua grande simplicidade e facilidade de aplicação a qualquer tipo de função.

2 O método implementado

O método de Monte Carlo consiste em calcular integrais definidas utilizando aproximações. Este método consiste em gerar vários números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo de interesse, avaliando o valor da função a ser integrada em cada um destes pontos e finalmente calculando a média desses valores obtidos para se obter a aproximação da integral definida. O algoritmo é o seguinte:

```
Algoritmo: Monte Carlo para integrais definidas entre [0,1]
Entrada: F - Funcao integravel
         N - Numero de pontos a serem amostrados
Saida: I - Aproximacao para a integral definida de F entre [0,1]


inicio
     I = 0
     para cont = 1 ate N faca
          x = numero aleatorio uniformemente distribuido entre 0 e 1
          I = I + F(x)
     fim para
     I = I / N
fim
```

Como o método de Monte Carlo é uma aproximação, não se pode afirmar que o valor encontrado por ele é o valor exato da integral. Entretanto, quanto mais pontos forem gerados maior será a confiabilidade na aproximação obtida.

3 Estratégia dos testes

O método implementado será avaliado segundo dois critérios - qualidade das respostas encontradas e tempo de execução.

Variando a quantidade de pontos amostrados poderemos avaliar a complexidade de tempo do método pois tal parâmetro corresponde ao número de iterações do mesmo. A qualidade das soluções será avaliada através do cálculo da porcentagem de erro que o método apresentou com relação ao valor exato da integral em cada um dos seguintes casos:

$$\int_0^1 x\ dx \tag{1}$$

$$\int_0^1 (x^2 + 5x + 7)\ dx \tag{2}$$

$$\int_0^1 (x^4 + 4x^3 + 2x + 100)\ dx \tag{3}$$

$$\int_0^1 sen(x)\ dx \tag{4}$$

$$\int_0^1 cos(x)\ dx \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{-0,5x}}\ dx \tag{6}$$

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{1 + e^{cos(x)}}\ dx \tag{7}$$

O resultado de cada avaliação foi feito com base na média aritmética de cem execuções.

4 Ambiente de testes

Todos os testes foram feitos em uma Sun SPARCstation 4 com 32Mb de RAM dedicada (apenas com os processos normais do Unix).

5 Resultados obtidos

O resultado da avaliação das funções são mostrados nos gráficos das figuras 1 , 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Em todos os gráficos o número de pontos utilizados no cálculo da aproximação é colocado no eixo das abcissas enquanto a porcentagem de erro com relação a resposta correta é colocada no eixo das ordenadas. Cada ponto é a média aritmética de cem execuções diferentes. As tabelas completas com a média, desvio padrão e variância de cada medida é apresentada no apêndice A.

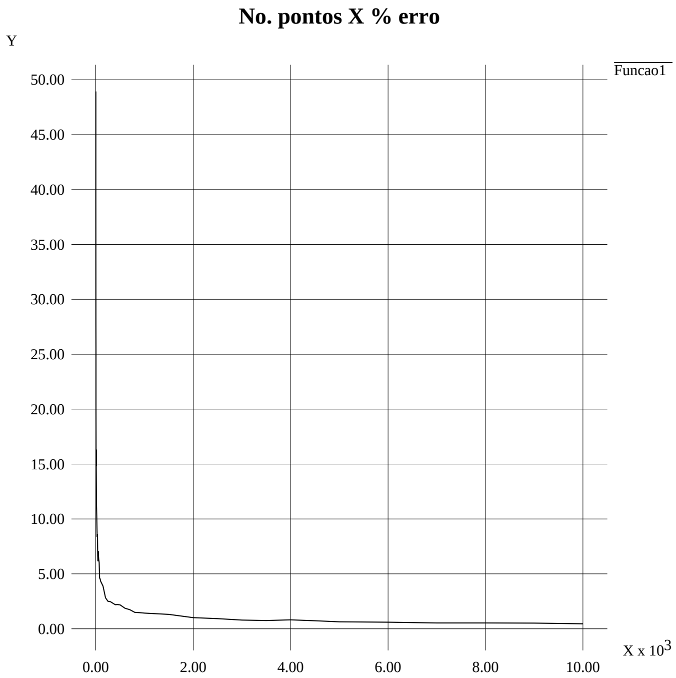

Figura 1: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

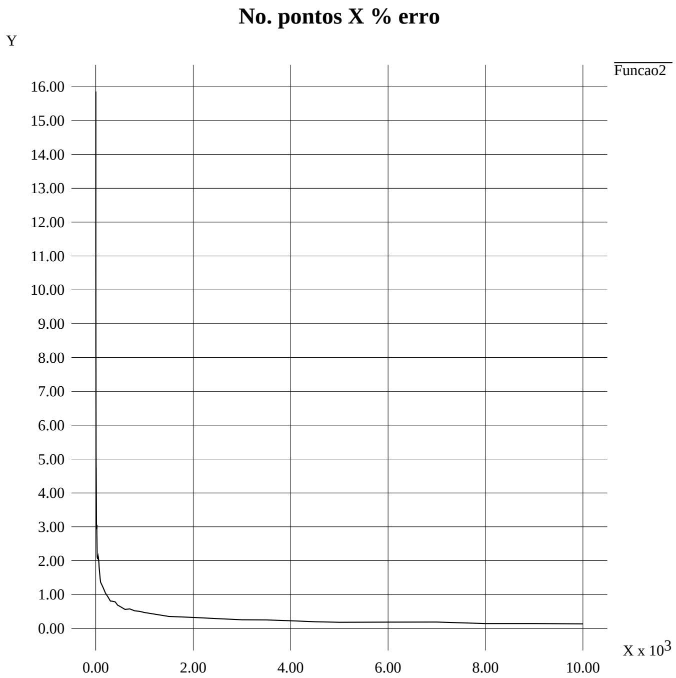

Figura 2: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

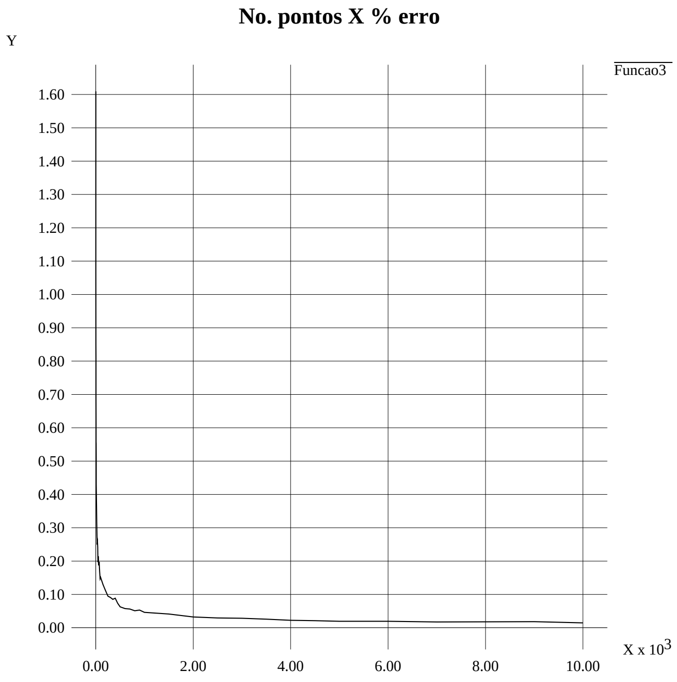

Figura 3: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

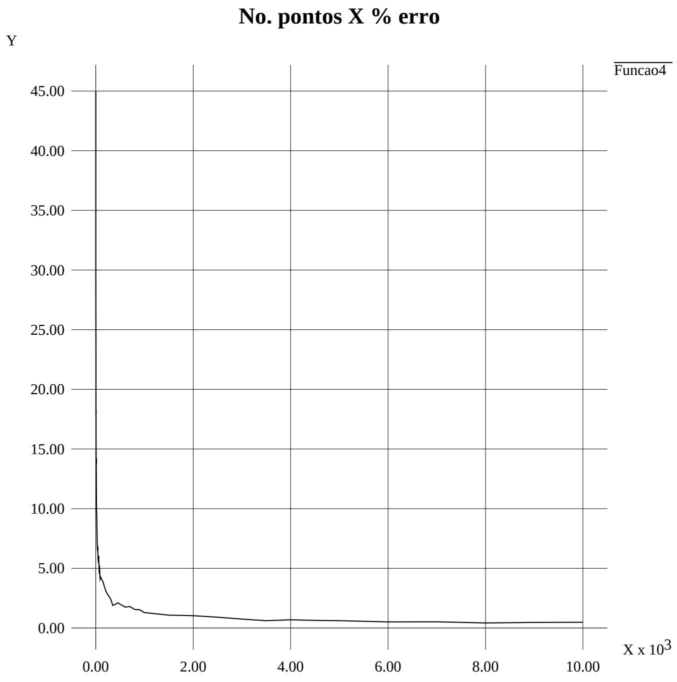

Figura 4: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

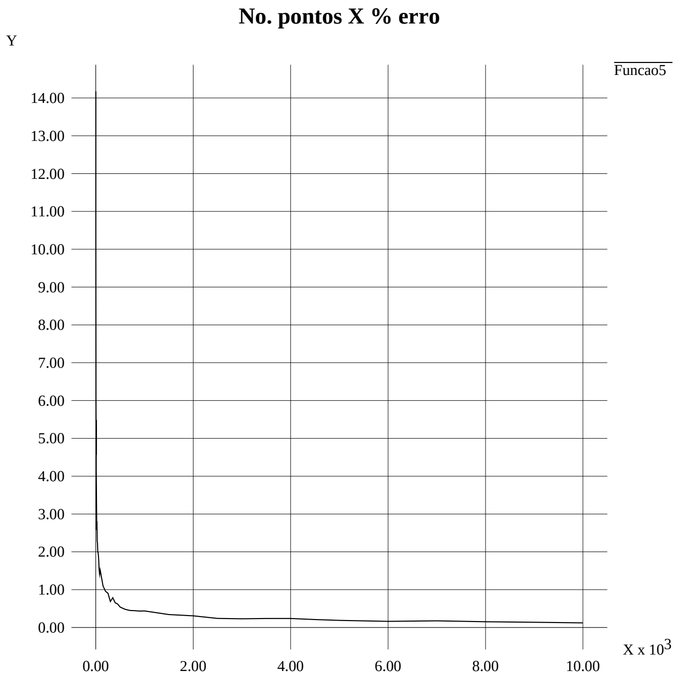

Figura 5: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

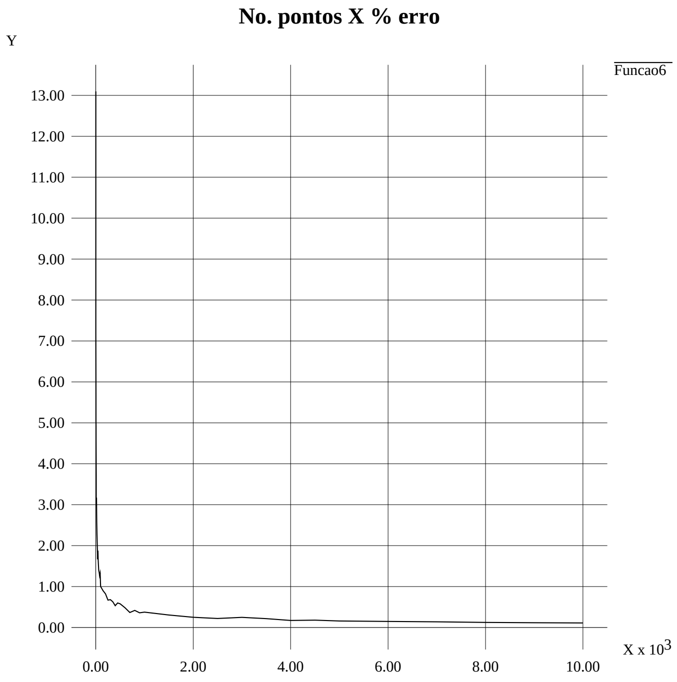

Figura 6: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

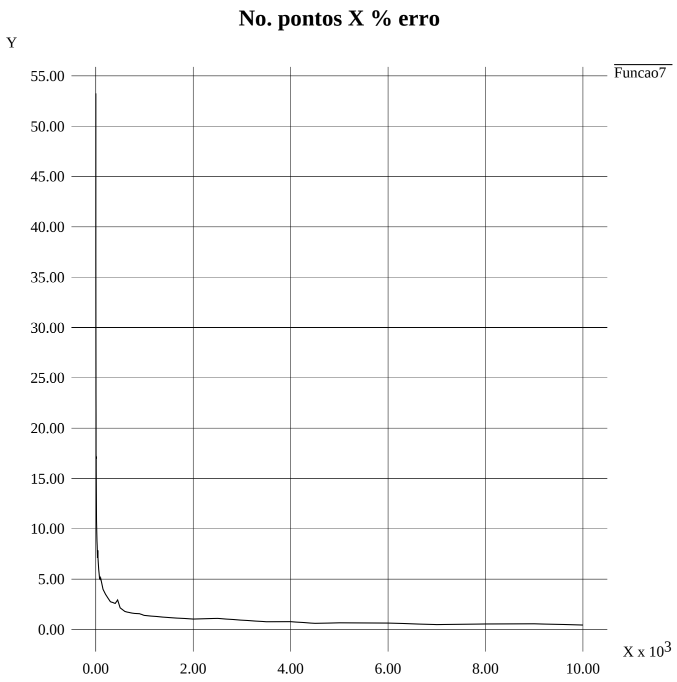

Figura 7: erro na aproximação da integral em função do número de pontos amostrados.

6 Análise dos resultados

Os resultados mostram que a qualidade da aproximação melhora muito na medida que se aumenta o número de pontos amostrados. Esta melhora, no entanto, tende a se estabilizar em um erro entre 0.1 e 0.5 % a partir do qual não há melhoria significativa.

Outra observação importante é a grande velocidade com que a aproximação melhora: no pior caso, obtido para a função 7, com apenas 200 amostragens o erro foi de apenas 3 %. Para a função 5 com apenas 200 amostragens o erro já era inferior a 1 %.

Com relação ao tempo de execução, não foi possível fazer medições precisas pois a execução do programa é muito rápida e o sistema operacional da máquina utilizada não provê recursos suficientes para uma medida precisa. No entanto, devido a extrema simplicidade do algoritmo sua complexidade teórica é facilmente avaliada: $O(n)$ no número de pontos amostrados.

7 Conclusões

O método de Monte Carlo se mostrou extremamente eficaz para o cálculo de integrais definidas no intervalo [0,1].

Como propostas futuras poderiam ser avaliadas outras funções mais complicadas com comportamento "instável" no intervalo [0,1]. As funções utilizadas como teste são relativamente suaves em tal intervalo. Além disso, poderiam ser calculadas integrais em intervalos de integração maiores. Em ambos os casos, a forma de decaimento da curva de erro deve se alterar.

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	48.9337	28.9821	839.965
2	38.9471	23.6118	557.517
3	27.7496	20.2057	408.269
4	25.2512	17.6711	312.269
5	20.3904	13.8628	192.177
6	17.2443	11.7786	138.736
7	16.4928	12.1174	146.831
8	14.8178	10.6882	114.237
9	16.3128	12.3395	152.264
10	15.3148	11.5034	132.329
15	11.2605	8.26734	68.3489
20	10.3155	7.66223	58.7097
25	9.15871	7.27719	52.9575
30	8.35776	6.84265	46.8218
35	8.62142	5.88521	34.6357
40	6.67176	5.09011	25.9092
45	6.15983	4.59113	21.0785
50	7.07093	4.41826	19.521
60	6.33697	4.09425	16.7629
70	6.03452	4.1874	17.5343
80	4.61755	3.70608	13.735
90	4.54022	4.04993	16.4019
100	4.33942	3.94677	15.577
150	3.88636	3.00825	9.04957
200	2.82446	2.31321	5.35096
250	2.50401	2.30455	5.31093
300	2.47185	1.85558	3.44316
350	2.32987	1.64388	2.70234
400	2.19368	1.54372	2.38308
450	2.20835	1.55927	2.43132
500	2.1719	1.35321	1.83118
600	1.86649	1.34831	1.81794
700	1.73666	1.18526	1.40483
800	1.50009	1.00714	1.01433
900	1.46819	0.988308	0.976752
1000	1.43116	1.10728	1.22606
1500	1.30885	0.891606	0.794962
2000	1.01168	0.772078	0.596104
2500	0.927397	0.674659	0.455165
3000	0.794631	0.55121	0.303833
3500	0.749541	0.548207	0.300531
4000	0.814721	0.594279	0.353167
4500	0.727569	0.549082	0.301491
5000	0.631419	0.534117	0.285281
6000	0.601602	0.510406	0.260514
7000	0.533647	0.429228	0.184237
8000	0.529274	0.400015	0.160012
9000	0.517954	0.39585	0.156697
10000	0.456171	0.354906	0.125958

Tabela 1: Função 1

Apêndice A - Tabelas de resultados das medidas

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	15.8581	8.6066	74.0736
2	11.0862	7.37381	54.3731
3	8.20184	4.8784	23.7988
4	7.47855	4.94948	24.4974
5	6.8816	4.95252	24.5275
6	5.62569	4.53849	20.5979
7	5.24188	3.63132	13.1865
8	4.75928	3.46544	12.0093
9	4.72854	3.64671	13.2985
10	4.67009	3.25873	10.6193
15	2.92402	2.68853	7.22822
20	3.0587	2.43291	5.91907
25	2.58429	2.15147	4.62884
30	2.10766	1.68538	2.8405
35	2.07071	1.55063	2.40444
40	2.07937	1.58868	2.52389
45	2.06654	1.45769	2.12487
50	2.12063	1.53258	2.3488
60	2.01712	1.63135	2.66131
70	1.79554	1.26691	1.60505
80	1.64549	1.20601	1.45447
90	1.46896	0.972859	0.946455
100	1.36393	0.917975	0.842679
150	1.2118	0.811781	0.658989
200	1.038	0.838438	0.702979
250	0.928476	0.743478	0.55276
300	0.805629	0.539844	0.291432
350	0.799231	0.562862	0.316814
400	0.781915	0.572543	0.327805
450	0.685261	0.540182	0.291797
500	0.645909	0.512978	0.263146
600	0.560619	0.460688	0.212233
700	0.574561	0.408914	0.167211
800	0.516563	0.414194	0.171557
900	0.502685	0.344238	0.1185
1000	0.469077	0.389538	0.15174
1500	0.352614	0.267996	0.0718216
2000	0.323729	0.249609	0.0623045
2500	0.288017	0.210868	0.0444654
3000	0.253848	0.184478	0.0340323
3500	0.24791	0.191965	0.0368506
4000	0.224218	0.184642	0.0340928
4500	0.19564	0.169853	0.0288502
5000	0.178523	0.134305	0.0180378
6000	0.18301	0.121127	0.0146717
7000	0.186132	0.1147	0.013156
8000	0.142448	0.102289	0.010463
9000	0.141459	0.105808	0.0111953
10000	0.132833	0.101305	0.0102628

Tabela 2: Função 2

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	1.60954	1.09658	1.20248
2	1.07883	0.688656	0.474247
3	0.848739	0.59863	0.358358
4	0.80903	0.605907	0.367123
5	0.691063	0.555678	0.308778
6	0.613791	0.486352	0.236538
7	0.557816	0.434622	0.188896
8	0.55306	0.409971	0.168076
9	0.500713	0.373139	0.139233
10	0.430251	0.313944	0.098561
15	0.370465	0.316569	0.100216
20	0.317316	0.228298	0.0521199
25	0.277862	0.200657	0.0402634
30	0.249649	0.217956	0.047505
35	0.255632	0.186997	0.0349677
40	0.241943	0.175468	0.0307889
45	0.19682	0.159141	0.0253257
50	0.214693	0.154377	0.0238323
60	0.187449	0.135581	0.0183822
70	0.197407	0.132312	0.0175064
80	0.169338	0.1091	0.0119028
90	0.147362	0.116642	0.0136053
100	0.151213	0.103886	0.0107923
150	0.129613	0.0971566	0.00943941
200	0.111327	0.0788273	0.00621374
250	0.0948363	0.078101	0.00609977
300	0.090939	0.0647219	0.00418893
350	0.0852798	0.0563397	0.00317416
400	0.0887409	0.0618061	0.00382
450	0.0736665	0.0577084	0.00333026
500	0.0627235	0.0464477	0.00215739
600	0.0576287	0.0433922	0.00188288
700	0.0560927	0.0387607	0.00150239
800	0.0508871	0.0396844	0.00157485
900	0.0529064	0.0324938	0.00105585
1000	0.0462968	0.0364921	0.00133167
1500	0.0412168	0.0302654	0.000915994
2000	0.0323386	0.0252518	0.000637654
2500	0.0292925	0.0229748	0.000527843
3000	0.0285326	0.0224631	0.000504591
3500	0.0257788	0.0176801	0.000312586
4000	0.0222642	0.0164521	0.00027067
4500	0.0211925	0.0165411	0.000273607
5000	0.019459	0.0138151	0.000190856
6000	0.0194791	0.0152467	0.000232463
7000	0.0173526	0.0140541	0.000197519
8000	0.0177914	0.0127948	0.000163708
9000	0.0183043	0.0130678	0.000170767
10000	0.0146856	0.0109142	0.00011912

Tabela 3: Função 3

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	44.9736	26.2222	687.602
2	30.1489	22.3628	500.093
3	25.5889	17.1685	294.757
4	23.1809	15.6634	245.341
5	17.9267	12.3964	153.671
6	18.2829	14.2211	202.239
7	16.2029	12.5816	158.296
8	13.7243	8.865	78.5882
9	14.1004	9.29985	86.4873
10	14.2282	10.5496	111.295
15	9.89953	7.80861	60.9744
20	9.44552	6.52616	42.5908
25	8.32529	6.30229	39.7189
30	7.10098	5.26709	27.7422
35	6.46543	4.81743	23.2076
40	6.82432	4.89766	23.9871
45	6.25528	4.55011	20.7035
50	5.76611	4.37526	19.1429
60	6.03039	4.3943	19.3099
70	4.80404	3.99575	15.966
80	4.98867	3.53444	12.4923
90	4.11809	3.11985	9.73344
100	4.26569	3.35616	11.2638
150	3.85606	2.72114	7.40462
200	3.16112	2.36246	5.5812
250	2.7651	2.13288	4.54919
300	2.49585	1.64117	2.69345
350	1.88996	1.41712	2.00823
400	1.96999	1.37768	1.898
450	2.10459	1.58254	2.50444
500	2.00121	1.38541	1.91937
600	1.75373	1.1117	1.23587
700	1.7967	1.27896	1.63574
800	1.54895	1.33278	1.77629
900	1.53044	1.03814	1.07774
1000	1.286	0.952582	0.907412
1500	1.07486	0.850594	0.723511
2000	1.02482	0.76832	0.590315
2500	0.902429	0.633503	0.401326
3000	0.740545	0.562396	0.316289
3500	0.608067	0.43632	0.190375
4000	0.687843	0.565372	0.319646
4500	0.633314	0.481698	0.232033
5000	0.610884	0.50418	0.254197
6000	0.508985	0.390326	0.152354
7000	0.517291	0.370841	0.137523
8000	0.42013	0.322228	0.103831
9000	0.460659	0.326608	0.106673
10000	0.479156	0.332785	0.110746

Tabela 4: Função 4

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	14.1761	8.18824	67.0473
2	10.6125	5.89275	34.7245
3	8.37212	5.81557	33.8208
4	6.59644	4.87565	23.772
5	6.12125	4.28944	18.3993
6	5.45439	3.53592	12.5027
7	4.5598	3.63252	13.1952
8	5.49032	4.00893	16.0715
9	5.18379	3.93323	15.4703
10	4.16788	3.17648	10.09
15	3.3876	2.71319	7.36139
20	2.57923	1.92784	3.71657
25	2.80556	1.91158	3.65412
30	2.28319	1.69353	2.86806
35	2.2298	1.52986	2.34048
40	2.02563	1.54535	2.38812
45	1.97925	1.42958	2.04371
50	1.97428	1.50536	2.26611
60	1.78559	1.39869	1.95634
70	1.51748	1.26161	1.59167
80	1.40541	1.09216	1.19282
90	1.51831	0.975066	0.950753
100	1.45618	1.09951	1.20893
150	1.09965	0.887015	0.786795
200	0.955554	0.691871	0.478685
250	0.906061	0.60342	0.364116
300	0.688516	0.504991	0.255016
350	0.785134	0.509583	0.259675
400	0.651983	0.528898	0.279733
450	0.619954	0.466373	0.217504
500	0.540741	0.43434	0.188651
600	0.481487	0.370293	0.137117
700	0.450601	0.354583	0.125729
800	0.444715	0.332848	0.110788
900	0.434644	0.349236	0.121966
1000	0.43826	0.349378	0.122065
1500	0.341648	0.234046	0.0547773
2000	0.307815	0.212331	0.0450845
2500	0.23869	0.180562	0.0326027
3000	0.229766	0.179536	0.0322332
3500	0.237772	0.149843	0.0224529
4000	0.238637	0.178159	0.0317406
4500	0.210036	0.178896	0.0320036
5000	0.187779	0.14783	0.0218536
6000	0.161548	0.128278	0.0164553
7000	0.176323	0.126522	0.0160079
8000	0.150725	0.124054	0.0153894
9000	0.138407	0.106993	0.0114475
10000	0.121996	0.0927973	0.00861133

Tabela 5: Função 5

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	13.0972	7.5294	56.6918
2	7.19244	5.12404	26.2558
3	6.47256	4.54372	20.6454
4	5.68686	3.88313	15.0787
5	5.05133	3.73135	13.923
6	4.91762	3.41681	11.6746
7	4.61562	3.40288	11.5796
8	4.14962	3.19368	10.1996
9	3.7071	2.8112	7.90282
10	3.16357	2.33137	5.4353
15	3.16005	2.48797	6.18997
20	2.58523	1.86009	3.45994
25	2.27896	1.82632	3.33544
30	2.07922	1.59521	2.54469
35	1.83498	1.28307	1.64626
40	1.66685	1.32476	1.755
45	1.87312	1.34058	1.79715
50	1.6545	1.26916	1.61076
60	1.40144	1.05122	1.10507
70	1.34772	1.0034	1.00681
80	1.262	0.941778	0.886946
90	1.32549	0.912032	0.831803
100	1.00262	0.893472	0.798293
150	0.899424	0.764276	0.584118
200	0.820142	0.5873	0.344921
250	0.669333	0.537162	0.288543
300	0.679808	0.46048	0.212042
350	0.627351	0.430216	0.185086
400	0.531673	0.468824	0.219796
450	0.598519	0.449562	0.202106
500	0.577903	0.400125	0.1601
600	0.482983	0.353599	0.125032
700	0.364997	0.318299	0.101314
800	0.417866	0.28993	0.0840593
900	0.35833	0.274296	0.0752383
1000	0.374549	0.248583	0.0617934
1500	0.305324	0.263294	0.0693235
2000	0.248901	0.17448	0.0304434
2500	0.219776	0.145192	0.0210806
3000	0.247757	0.173431	0.0300783
3500	0.215332	0.144781	0.0209614
4000	0.171554	0.132372	0.0175223
4500	0.178515	0.131918	0.0174023
5000	0.158045	0.130946	0.0171469
6000	0.147762	0.107847	0.0116309
7000	0.137605	0.0980195	0.00960782
8000	0.12378	0.0952118	0.00906529
9000	0.116523	0.0972471	0.00945699
10000	0.110875	0.0824598	0.00679962

Tabela 6: Função 6

Abcissa	Média	Desvio padrão	Variância
1	53.251	31.1388	969.624
2	37.3838	24.5824	604.293
3	29.881	22.0176	484.773
4	24.9527	18.7562	351.795
5	23.6088	16.6156	276.079
6	21.099	14.2801	203.92
7	17.4924	13.5672	184.069
8	16.9712	13.5828	184.493
9	17.1867	13.3705	178.771
10	16.0251	13.1135	171.964
15	10.8353	8.29543	68.8142
20	9.78443	7.50539	56.3309
25	8.81624	8.01284	64.2056
30	8.29323	6.30451	39.7469
35	7.10106	5.09857	25.9954
40	7.86974	6.57431	43.2215
45	7.20416	5.40996	29.2677
50	6.7926	5.25101	27.5731
60	5.95447	4.41732	19.5127
70	5.51599	4.0516	16.4155
80	5.01583	3.62764	13.1598
90	4.97594	4.03394	16.2727
100	5.13196	3.73087	13.9194
150	3.99715	3.0495	9.29943
200	3.49889	2.48867	6.1935
250	3.12285	2.17791	4.74331
300	2.76667	1.97881	3.91567
350	2.67809	1.95385	3.81752
400	2.5875	1.83159	3.35471
450	2.93504	2.10995	4.45189
500	2.15452	1.71324	2.93518
600	1.78575	1.46775	2.15428
700	1.67585	1.26786	1.60746
800	1.59127	1.17273	1.37529
900	1.566	1.19729	1.43351
1000	1.39202	1.12327	1.26174
1500	1.18271	0.925226	0.856043
2000	1.04506	0.800357	0.640572
2500	1.10198	0.860373	0.740241
3000	0.925258	0.615518	0.378862
3500	0.767594	0.620957	0.385587
4000	0.776915	0.645013	0.416042
4500	0.612176	0.510752	0.260868
5000	0.665415	0.566915	0.321393
6000	0.644671	0.512913	0.26308
7000	0.488636	0.389997	0.152098
8000	0.55185	0.355661	0.126495
9000	0.564919	0.412909	0.170494
10000	0.449083	0.320543	0.102748

Tabela 7: Função 7

Referências

[1] S. M. Ross. *A Course in SIMULATION*. Macmillan Publishing Company, 1990.