Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Matemática Discreta | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira | www.dcc.ufmg.br/~nvieira
Primeira Lista de Exercícios | Entrega: 02/09/2013

Soma

1. Use a notação de somatória para expressar as somas:

   a) $-5 + 0 + 5 + 10 + \cdots + 90$.
   b) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.
   c) $2 + 6 + 12 + 20 + \cdots n(n-1)$.
   d) $1 + 1 + 4/3 + 8/4 + 16/5 + \cdots + 2^n/(n+1)$.

Conjuntos

2. Escreva o resultado para cada uma das expressões ($\mathcal{P}(X)$ é o conjunto potência de X):

   (a) $(\{1,3,5\} \cup \{1,3,6\}) - \{1,4\}$.
   (b) $\mathcal{P}(\{1,3,5\})$.
   (c) $\{1,2,3\} \times \{4,5,1\}$.
   (d) $\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{2,4\})$.

3. Em que situações se tem as seguintes relações entre os conjuntos A e B?

   (a) $A \cup B = A$.
   (b) $A \cap B = A$.
   (c) $A - B = A$.
   (d) $A - B = B - A$.

4. Encontre todas as partições do conjunto $\{a, b, c\}$.

5. Prove:

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Relações e Funções

6. Que propriedades (dentre reflexividade, simetria e transitividade) têm as seguintes relações?

   a) R sobre $\{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
   b) R sobre $\{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.
   c) R sobre todos os habitantes de BH definida por: xRy se, e somente se, x é um ancestral de y. (O ancestral pode ser de qualquer sexo.)
   d) R sobre todos os habitantes de BH definida por: xRy se, e somente se, x é uma ancestral de y. (O ancestral é do sexo feminino.)

e) $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(X)$ (X é um conjunto qualquer).

f) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, b é divisível por a.

7. Considere as seguintes relações de equivalência:

   a) $R_1 \subseteq U \times U$: $xR_1y \Leftrightarrow x$ e y têm o mesmo pai, sendo U o conjunto de todos os alunos da UFMG.

   b) $R_2 \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$: $xR_2y \Leftrightarrow x - y \mod 8 = 0$.

   Quais são as classes de equivalência induzidas por cada uma delas?

8. Classifique (ou seja, diga se são injetoras, etc.) as seguintes funções de $\mathbf{N}$ para $\mathbf{N}$:

   (a) $f(n) = n + 1$.

   (b) $f(n) = n \div 2$, onde "$\div$" é divisão inteira.

   (c) $f(n) = n(n+1)/2$.

   (d) $f(n) = n - 1$ se n é ímpar, e $f(n) = n + 1$, caso contrário.

9. Dê uma função bijetora (correspondência um-para-um) do conjunto dos números naturais pares para o dos números naturais ímpares.

Prova de Teoremas

10. Sejam A, B, C e D conjuntos e suponha que $A - B \subseteq C \cap D$ e $a \in A$. Prove que se $a \notin D$, então $a \in B$. Use a contrapositiva (prova indireta).

11. Suponha que $A - B \subseteq C$, e seja x um elemento qualquer no universo. Prove, por contradição, que se $x \in A - C$, então $x \in B$.

12. Prove que se n é um número inteiro não divisível por 3, então $n^2 = 3k + 1$ para algum inteiro k.

13. Dê uma prova indireta de que se $x^2 + y^2 = z^2$, então pelo menos um, dentre x, y e z, é par.

14. Prove as leis de De Morgan para conjuntos:

    a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

    b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

15. Prove que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, mas não vice-versa, isto é, nem sempre $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

O princípio do pombal (*Pigeonhole principle*)

16. Em qualquer grupo de $m \geq 2$ pessoas existem 2 pessoas com o mesmo números de amigos no grupo. (Observe que siclano é amigo de beltrano $\Leftrightarrow$ beltrano é amigo de siclano.)

17. Supondo que uma certa empresa tem 6 computadores, cada um conectado a zero ou mais dos outros computadores, então existem no mínimo 2 computadores diretamente conectados ao mesmo número de computadores.

18. Qualquer conjunto de 7 números inteiros distintos contém dois números cuja soma ou diferença é múltiplo de 10.

Um pouquinho de probabilidade

19. Em um experimento de lançamento de dados, encontre as probabilidades dos seguintes eventos:
    (a) Ambos os dados apresentam o mesmo número.
    (b) A soma dos dois números é par.
    (c) A soma é o quadrado de um dos números.
20. Encontre a probabilidade de que na escolha aleatória de um subconjunto de dois números dentre os do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ocorra o seguinte:
    (a) O subconjunto é $\{1, 2\}$.
    (b) 1 não pertence ao subconjunto.
21. Uma urna contém 2 bolas pretas e 3 vermelhas. Se duas bolas são retiradas em sequência, qual a probabilidade de que ambas tenham a mesma cor?

Indução Matemática

22. Mostre, por indução, que $\sum_{k=0}^{n}(2^k) = 2^{n+1} - 1$ para $n \in \mathbf{N}$.
23. Prove por indução: $\sum_{k=0}^{n}(k2^k) = (n-1)2^{n+1} + 2$ para $n \in \mathbf{N}$.
24. Demonstre, por indução, que $\sum_{i=0}^{n}(i \times i!) = (n+1)! - 1$ para $n \in \mathbf{N}$.
25. Utilize indução matemática para mostrar que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9 para $n \in \mathbf{N}$.