

### Combinatória Elementar

- De quantas maneiras se pode arranjar as letras da palavra GUARATINGUETA:
  - No total?
  - Com todos os As consecutivos?
  - Com todas as vogais consecutivas?
  - De forma que não existam (dois) A's consecutivos?
- Determine o número de seleções de 6 bolas de sorvete a partir de bolas de 20 sabores diferentes, de forma que não sejam selecionadas mais de duas bolas com o mesmo sabor.
- Em uma transferência (simultânea) de 12 bandidos de uma penitenciária para outra eles devem ser acompanhados cada um por um policial. Quantos grupos de 12 pares podem ser constituídos a partir dos 12 bandidos e 12 policiais?
- Um batalhão de 50 soldados deve fazer 5 filas de 10 elementos. A única restrição é que os 5 maiores soldados devem encabeçar as 5 filas. Quantas possibilidades existem para isso?
- De quantas maneiras 5 homens e 5 mulheres podem ser dispostos lado a lado de forma que homens não fiquem juntos?
- Uma fazendeiro produz laranjas de 5 diferentes qualidades. Supondo que ele vá selecionar 10 laranjas para presentear o vizinho, quantas seleções são possíveis:
  - Se uma seleção pode ser constituída de quaisquer qualidades de laranjas?
  - Se uma seleção deve ter pelo menos uma laranja de cada tipo?
- Um grupo de estudos de 10 pessoas deve ser formado a partir de uma turma de 12 alunos e 6 alunas. De quantas maneiras é possível fazer essa formação, supondo que:
  - Deva haver exatamente 5 alunas no grupo?
  - Deva haver, no mínimo, 4 alunas no grupo?
- Um grupo de 18 políticos deve formar um “trem da alegria”, de forma que 3 deles viajem para Nova Iorque, 4 para Los Angeles, 5 para Orlando e 6 para Las Vegas. De quantas formas tal grupo pode ser assim particionado?
- Se  $n$  objetos distintos são distribuídos em  $n$  caixas distintas, qual é a probabilidade que:
  - Nenhuma caixa fique vazia?
  - Exatamente uma caixa fique vazia?
- As 52 cartas do baralho são distribuídas em número igual para 4 pessoas distintas. Qual é a probabilidade que:
  - Cada pessoa receba um dos ases?

- (b) Uma pessoa receba todos os ases?
11. Quantas seqüências ternárias de 30 dígitos têm exatamente dez 1s?
12. Escreva problemas equivalentes do tipo “soluções em inteiros de uma equação” para:
- O número de maneiras de distribuir  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas distintas com pelo menos  $k$  bolas na primeira caixa.
  - O número de maneiras de distribuir  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas distintas de forma que nenhuma caixa contenha mais de duas bolas.
  - O número de subconjuntos de três elementos de  $\{A, B, C, D, E\}$ .
  - O número de maneiras de distribuir  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas distintas de forma que as primeiras duas caixas contenham um total de  $p$  bolas.
13. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos para o sistema de equações:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{array} \right\} \text{ com } x_k \geq 0$$

14. Qual é o coeficiente de  $x^{10}$  em  $(1 - 2x - 3y)^{20}$ ?
15. Prove, por indução, que  $C(n + 1, r + 1) = \sum_{k=r}^n C(k, r)$ .
16. Prove, usando raciocínio combinatório:
- $\sum_{k=0}^n C(n, k)^2 = C(2n, n)$ .
  - $\sum_{k=0}^r C(m, k)C(n, r - k) = C(m + n, r)$ .
17. Avalie, usando o teorema binomial:
- $\sum_{k=0}^n 2^k C(n, k)$ .
  - $\sum_{k=0}^n k 3^k C(n, k)$ .

## Funções Geradoras

18. Apresente funções geradoras para:
- O número de seqüências binárias de  $r$  dígitos.
  - O número de multiconjuntos de  $r$  elementos tomados de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .
  - O número de multiconjuntos de  $r$  elementos tomados de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , nos quais cada elemento aparece pelo menos uma vez.
19. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$ , com  $x_1 + x_2 = 6$  e  $x_k \geq 0$ .
  - $x_1 + x_2 + x_3 < r$ , com  $k \leq x_k < 2k$ .
  - $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$ , com  $x_k > k$ .
20. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo,  $r$ .

21. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:
- (a)  $x^{24}$  em  $(x^3 + x^4 + \dots + x^{12})^4$ .
  - (b)  $x^6$  em  $(x + x^2 + \dots)^2(1 - x^3)^3$ .
  - (c)  $x^5$  em  $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$ .
22. Encontre funções geradoras para os seguintes  $a_n$ :
- (a)  $a_n = 3n - 4$ .
  - (b)  $a_n = n(n - 1)$ .
  - (c)  $a_n = n^4$ .
  - (d)  $a_n = n^2 3^n$ .
23. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:
- (a)  $\sum_{k=0}^n (3k - 4)$ .
  - (b)  $2 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + n(n - 1)$ .
  - (c)  $\sum_{k=1}^n n^4$ .
  - (d)  $3 + 2^2 3^2 \dots + n^2 3^n$ .
24. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:
- (a)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ , com  $1 \leq x_i \leq 6$ .
  - (b)  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ , com  $1 \leq x_1 \leq 5$ ,  $x_2 \geq 2$  e  $x_3 \geq 3$ .
  - (c)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ , com  $1 \leq x_i \leq 10$ .
25. De quantas maneiras se pode distribuir 13 reais a 30 crianças, se cada criança recebe no máximo 2 reais?
26. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e  $r$  meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?
27. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma das cores).
28. Quantas maneiras existem de selecionar  $4r$  bolas a partir de  $2r$  bolas vermelhas idênticas,  $2r$  bolas verdes idênticas e  $2r$  bolas brancas idênticas?