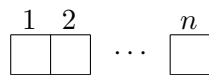


Relações de Recorrência

- Um banco paga 4,5% de juros por ano. Além disso, ele paga um bônus de \$100 reais no final de cada ano (após pagos os juros). Encontre uma relação de recorrência para o total pago após n anos, se o investimento inicial for de \$200 reais.
- Encontre uma relação de recorrência para o número de seqüências quaternárias de n dígitos:
 - sem 1's consecutivos.
 - com número par de 0's.
- Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de colocar idênticos Toyotas, Cadillacs e Mercedes em um espaço cujo tamanho é n "unidades", sabendo que Mercedes e Cadillacs ocupam 2 unidades cada um, e que Toyotas ocupam uma unidade cada um.
- Considere n quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:



Seja $a_n =$ número de maneiras de colorir os quadrados, de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes. Encontre uma relação de recorrência para a_n , para cada um dos seguintes casos:

- Cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou de verde.
 - Cada quadrado pode ser colorido de vermelho, de verde, ou de amarelo.
 - Generalize para k cores (incluindo vermelho).
- Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir n degraus, se em cada estágio pudermos avançar 1, 3 ou 5 degraus de uma vez.
 - Seja o conjunto de dígitos e letras $X = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e, f, g\}$. Encontre uma relação de recorrência para o número de seqüências de n símbolos de X , para cada uma das seguintes situações:
 - não há letras consecutivas (idênticas ou não).
 - não há dígito seguido de letra.
 - o número de letras é par.
 - Encontre uma relação de recorrência para o número de seqüências ternárias de n dígitos sem a subsequência 012.
 - Encontre uma relação de recorrência para o número de regiões criadas por n linhas sobre uma folha de papel se k das linhas são paralelas e cada uma das outras $n - k$ intersepta todas as linhas (e não mais de 2 linhas se interseptam em um único ponto).

9. Mostre que $C_1(1 + \sqrt{5})^n + C_2(1 - \sqrt{5})^n$ é a solução geral para $a_n - 2a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$.
10. Resolva as seguintes relações de recorrência:
- (a) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.
 - (b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.
 - (c) $a_1 = 2, a_2 = 6, a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.
 - (d) $a_1 = 5, a_2 = -5, a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.
11. Resolva as seguintes relações de recorrência:
- (a) $a_0 = 1, a_n - 2a_{n-1} = n^2$ para $n \geq 1$.
 - (b) $a_0 = 1, a_1 = -1, a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n$ para $n \geq 2$.
 - (c) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ para $n \geq 2$.
 - (d) $a_0 = 0, a_n + 3a_{n-1} = 2^n$ para $n \geq 1$.
 - (e) $a_1 = 0, a_2 = 0, a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$ para $n \geq 3$.
 - (f) $a_0 = 1, a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ para $n \geq 1$.
 - (g) $a_0 = 2, a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.
12. Resolva as seguintes relações de recorrência:
- (a) $a_1 = 1, a_n^3 = 2a_{n-1}^3 + 1$ para $n \geq 2$. (Sugestão: faça $b_n = a_n^3$.)
 - (b) $a_0 = 2, a_n = na_{n-1} + n!$ para $n \geq 1$.
13. Usando relações de recorrência, avalie as seguintes somas:
- (a) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$.
 - (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
 - (c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$.

Princípio de inclusão e exclusão

1. Numa cidade em que são publicados os jornais A, B e C, foram obtidos os seguintes resultados numa pesquisa: 20% da população lê o jornal A, 16% o jornal B, 14% o jornal C; 8% lê A e B, 5% A e C e 4% B e C. Somente 2% lê os três jornais. Qual a porcentagem da população que não lê nenhum destes três jornais?
2. Dentre os números de 1 a 1000, inclusive, quantos são divisíveis por 2, 5 ou 12? Quantos não são divisíveis por 5, nem por 6, nem por 8?
3. Encontre o número de sequências de tamanho k , tomadas do conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, em que cada a_i aparece pelo menos uma vez em cada sequência.
4. Quantos arranjos existem das letras A,A,A,B,B,B,C,C,C, nos quais não apareçam 3 letras consecutivas idênticas?
5. Usando o princípio da inclusão e exclusão, determine o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, se $-2 \leq x_k \leq 10$.

6. Uma companhia de sabão em pó oferece 3 tipos diferentes de cupons em suas caixas de sabão. Cada caixa contém um cupom; se você colecionar pelo menos um de cada tipo, você ganha um brinde. Qual é a probabilidade de você ganhar um brinde, se você comprar 10 caixas? (A probabilidade é o número de distribuições possíveis em que aparece pelo menos um cupom de cada tipo, dividido pelo número total de distribuições possíveis.)
7. Oito pessoas entram em um elevador, no primeiro andar. O elevador descarrega passageiros em cada um dos andares seguintes (no mínimo, um passageiro por andar), até ficar vazio no quinto andar (após descarregar, no mínimo, um passageiro). Determine, usando o princípio da inclusão e exclusão, de quantas maneiras diferentes isto pode acontecer.
8. Em quantas permutações de $1, 2, \dots, n$, um número k nunca é imediatamente seguido de $k + 1$?
9. Quantas maneiras existem de arranjar as letras em REDIVIDERS de forma que apareça pelo menos um par de letras consecutivas idênticas?
10. De quantas maneiras podemos permutar os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de forma que nenhum dígito par fique em sua posição natural?