

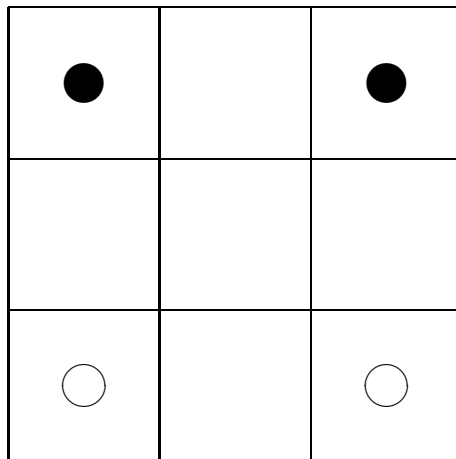
Introdução à Teoria dos Grafos

1. Quantas arestas têm os grafos K_n^c e $K_{m,n}^c$?
2. Uma mulher deve transportar um leão, uma raposa e um coelho de uma margem a outra de um rio, em um barco que só cabe a mulher e mais um dos animais. Se o leão e a raposa, ou a raposa e o coelho, ficarem na margem oposta em que estiver a mulher, em dado instante, o primeiro come o segundo (esse leão não gosta de coelho). Este problema pode ser modelado via grafos, criando-se um vértice para cada configuração segura (aquela em que ninguém come ninguém) possível, e uma aresta entre dois vértices se a configuração representada por um puder ser obtida daquela representada pelo outro cruzando-se o rio. Assim feito, um caminho simples do vértice inicial (que representa todos na margem A) ao vértice meta (todos na outra margem) corresponde a uma forma de cruzar o rio com os ditos elementos. Construa o grafo, e mostre todas as formas de cruzar o rio com segurança para a raposa e o coelho.
3. Prove que um grafo simples com n vértices não pode ser bipartite se tiver mais de $n^2/4$ arestas. *Dica:* Suponha que pode ser bipartite. Então os vértices podem ser divididos em conjuntos de k e $n - k$ vértices. Conte o número de arestas.
4. Qual é o maior número possível de arestas em um grafo com 31 vértices, se cada vértice tem grau, no máximo, igual a 3?
5. Prove que se G é um grafo com exatamente 2 vértices de grau ímpar, então ambos os vértices estão no mesmo componente conectado.
6. Desenhe todos os grafos simples de 4 vértices não isomorfos entre si.
7. Suponha que uma imersão do grafo simples G no plano tenha 20 faces. Se G é regular de grau 5, quantos vértices G contém?
8. Prove que se G é um grafo planar com k componentes, então qualquer imersão de G satisfaz $V - E + F = k + 1$.

Caminhamentos

9. Liste todos os grafos simples de quatro vértices:
 - (a) Eulerianos.
 - (b) Hamiltonianos.
10. Qual é o número mínimo de arestas a adicionar ao grafo de Königsberg, de forma que se obtenha um grafo Euleriano?

11. Para que valores de m e n são K_n e $K_{m,n}$ Eulerianos?
12. Uma *ponte* em um grafo é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo.
- (a) Um grafo Euleriano pode conter uma ponte?
- (b) Um grafo com trajeto Euleriano pode conter uma ponte?
13. Desenhe, se possível, grafos simples com as seguintes características:
- (a) O grafo tem um trajeto Euleriano e um caminho Hamiltoniano.
- (b) O grafo não tem um trajeto Euleriano, nem caminho Hamiltoniano.
14. Seja o seguinte tabuleiro, em que \bullet representa um cavalo preto e \circ representa um cavalo branco:



Lembrando que um cavalo (no jogo de xadrez) se move em L, modele o problema por meio de grafo e mostre como inverter as peças, isto é, colocar os cavalos pretos onde estão os brancos, e vice-versa.

15. (a) Mostre que se G é um grafo simples com n vértices e pelo menos $C(n-1, 2) + 2$ arestas, então G é Hamiltoniano.
- (b) Mostre que (a) não é verdade se a condição é relaxada para “pelo menos $C(n-1, 2) + 1$ arestas”.