Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Primeira Prova/Solução do professor — 4/9/2013

1. Sobre somatória:

   (a) Avalie: $\sum_{k=-3}^{5}(k^2-2)$.

   (b) Expresse usando a notação de somatória: $1+8+27+64+\cdots+n^3$.

   Solução:

   (a) $\sum_{k=-3}^{5}(k^2-2) = ((-3)^2-2)+((-2)^2-2)+((-)1^2-2)+(0^2-2)+(1^2-2)+(2^2-2)+(3^2-2)+(4^2-2)+(5^2-2) = 7+2-1-2-1+2+7+14+23 = 51.$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2. Seja um grupo de 20 pessoas, 13 das quais do sexo feminino. Suponha que 8 destas pessoas do sexo feminino sejam casadas (não necessariamente com pessoas do grupo). Em cada um dos casos a seguir, diga se a situação apontada é possível. Em caso positivo, indique o número de *pessoas do sexo masculino casadas*.

   (a) Há 8 pessoas solteiras.

   (b) Há 15 pessoas que são do sexo feminino ou são solteiras (ou ambos).

   (c) Considerando apenas as pessoas do sexo masculino, o número de casadas é idêntico ao de solteiras.

   Dica: comece fazendo um diagrama mostrando as 4 partes obtidas considerando-se sexo (masculino ou feminino) e situação matrimonial (casado ou solteiro).

   Solução:

   Há 13 pessoas do sexo feminino e, portanto, $20-13=7$ do sexo masculino. Das 13 pessoas do sexo feminino, 8 são casadas e, portanto, $13-8=5$ são solteiras. Denotando-se por x e y os números de pessoas do sexo masculino casadas e solteiras, tem-se o seguinte diagrama que sintetiza as informações:

	casados	**solteiros**
fem: 13	8	5
masc: 7	x	y

   a) Sabe-se que $y+5=8$. Logo, $y=3$ e $x=7-3=4$.

   b) Sabe-se que $13+y=15$. Logo, $y=2$ e $x=7-2=5$.

c) Situação impossível: como $x + y = 7$, é impossível ter $x = y$.

3. Que propriedades, dentre reflexividade, simetria e transitividade, têm as seguintes relações? Diga também quais são relações de equivalência.

   (a) R sobre todos os alunos da UFMG, definida por: $xRy \Leftrightarrow x$ é mais velho que y.

   (b) R sobre $\mathcal{P}(X)$ (X é um conjunto finito qualquer), definida por: $xRy \Leftrightarrow$ o número de elementos do conjunto x é menor ou igual ao de y.

   (c) R sobre $\mathcal{P}(X)$ (X é um conjunto finito qualquer), definida por: $xRy \Leftrightarrow x$ e y têm o mesmo número de elementos.

   Solução:

   (a) Não reflexiva, não simétrica, transitiva.

   (b) Reflexiva, não simétrica, transitiva, se $X \neq \emptyset$. Se $X = \emptyset$, R é reflexiva, simétrica e transitiva.

   (c) Reflexiva, simétrica, transitiva.

   A última é relação de equivalência. A penúltima também, se $X = \emptyset$.

4. Em certo torneio de tênis, há uma fase inicial em que cada um dos jogadores joga com todos os outros exatamente uma vez. Suponha que cada jogador vence pelo menos uma partida. Mostre que ao final da fase pelo menos dois jogadores terão vencido o mesmo número de partidas.

   Solução:

   Suponha que o torneio tenha n jogadores. Já que cada jogador vence pelo menos uma partida, segue-se que cada jogador vence de 1 a $n-1$ partidas. Como são n jogadores, cada um podendo vencer de 1 a $n-1$ partidas, pelo princípio da casa de pombos pelo menos dois jogadores terão vencido o mesmo número de partidas.

5. Uma caixa contém 3 bolas verdes, 4 amarelas e 5 azuis. Se três bolas são retiradas em sequência, qual a probabilidade de que a primeira seja amarela, a segunda azul e a terceira verde?

   Solução:

   Como são $3+4+5 = 12$ bolas, o espaço amostral contém $12 \times 11 \times 10 = 1320$ eventos elementares. O número destes eventos em que a primeira bola é amarela, a segunda azul e a terceira verde é: $4 \times 5 \times 3 = 60$. Logo, a probabilidade é $60/1320 = 1/22$.

6. Mostre, usando indução matemática, que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, ou seja, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ para todo $n \geq 1$.

   Solução: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$. Seja n um número natural arbitrário tal que $n \geq 1$. Suponha, como hipótese de indução, que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Basta mostrar que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$. Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 && \text{pela definição de } \sum \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 && \text{pela hipótese de indução} \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}
$$