Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Matemática Discreta | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Segunda Prova | 30/9/2013

A questão 0 vale 1 ponto e as restantes valem 3 pontos cada uma.

0. Um torneio de natação vai ser disputado por 8 atletas. Quantas possibilidades de premiação existem, considerando que só recebem prêmios o primeiro (medalha de ouro), o segundo (medalha de prata) e o terceiro (medalha de bronze) colocados?

1. De quantas maneiras se pode arranjar as letras AAAAOOOOXX (4 As, 4 Os, 2 Xs):
   (a) No total?
   (b) Sem As consecutivos?

2. Suponha que n bolinhas brancas idênticas são distribuídas (aleatoriamente) em n caixas numeradas de 1 a n. Qual é a probabilidade que:
   (a) Nenhuma caixa fique vazia?
   (b) Exatamente uma caixa fique vazia?

3. Escreva problemas do tipo "soluções em inteiros de uma equação" equivalentes aos abaixo. Em seguida, para cada um, determine a função geradora correspondente.
   (a) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos i bolas na i-ésima caixa.
   (b) O número de multiconjuntos de 6 elementos tirados do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que:
      - o número 1 pode aparecer no máximo duas vezes;
      - o número 5 deve aparecer no mínimo duas vezes.

      Para este problema, determine também a solução: o coeficiente de x^6 na função geradora.

4. Determine o número de maneiras de pintar 10 bolas idênticas, dadas as seguintes restrições:
   - há 4 cores disponíveis: branca, amarela, azul e verde;
   - as tintas azul e verde são suficientes para pintar no máximo 3 bolas (para cada uma das cores);
   - existem tintas branca e amarela à vontade.

   Dica: Use função geradora.

5. Encontre funções geradoras para:
   (a) n.
   (b) 2^n.
   (c) $2^n - n$.
   (d) $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k)$.

No verso estão reproduzidas algumas identidades úteis para manipulação de funções geradoras e extração de coeficientes.

Identidades úteis para manipulação de funções geradoras e extração de coeficientes:

- $(1 + x)^n = C(n, 0) + C(n, 1)x + C(n, 2)x^2 + \cdots + C(n, n)x^n$
- $(1 + x + x^2 + \cdots)^n = C(n - 1 + 0, 0) + C(n - 1 + 1, 1)x + C(n - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots$
- $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
- $(1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^n = (1 - x^{m+1})^n(1 + x + x^2 + \cdots)^n$
- $(1 - x^k)^n = C(n, 0) - C(n, 1)x^k + C(n, 2)x^{2k} - \cdots + (-1)^n C(n, n)x^{nk}$
- Dados que $g(x)$ e $h(x)$ sejam as funções geradoras para a_n e b_n, respectivamente, então:
  - $c_1 g(x) + c_2 h(x)$ é a função geradora para $c_1 a_n + c_2 b_n$, se c_1 e c_2 são constantes.
  - $g(x)h(x)$ é a função geradora para $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
  - $(1 - x)g(x)$ é a função geradora para $a_n - a_{n-1}$.
  - $xg'(x)$ é a função geradora para na_n.
  - $g(x)/(1 - x)$ é a função geradora para $\sum_{k=0}^{n} a_k$.