Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Segunda Prova/Solução do professor

0. Um torneio de natação vai ser disputado por 8 atletas. Quantas possibilidades de premiação existem, considerando que só recebem prêmios o primeiro (medalha de ouro), o segundo (medalha de prata) e o terceiro (medalha de bronze) colocados?

   Solução: $P(8,3) = 8.7.6 = 336$.

1. De quantas maneiras se pode arranjar as letras AAAAOOOOXX (4 As, 4 Os, 2 Xs):

   (a) No total?

   (b) Sem As consecutivos?

   Solução:

   (a) $P(10;4,4,2) = 10!/(4!4!2!) = 10.9.8.7.6.5/(24.2) = 10.9.7.5 = 3150$.

   (b) $P(6;4,2) \times C(7,4) = [6!/(4!2!)] \times [(7.6.5)/6] = 15 \times 35 = 525$.

2. Suponha que n bolinhas brancas idênticas são distribuídas (aleatoriamente) em n caixas numeradas de 1 a n. Qual é a probabilidade que:

   (a) Nenhuma caixa fique vazia?

   (b) Exatamente uma caixa fique vazia?

   Solução:

   O número de distribuições possíveis de n bolinhas idênticas em n caixas distintas é $C(n-1+n,n) = C(2n-1,n) = (2n-1)!/n!(n-1)!$. Segue-se que:

   (a) Como o número de distribuições em que nenhuma caixa fique vazia é 1, a probabilidade é $1/C(2n-1,n) = n!(n-1)!/(2n-1)!$.

   (b) As caixas a ficar vazia e a conter duas bolinhas podem ser escolhidas de $n(n-1)$ maneiras. As outras $n-2$ caixas vão conter as bolinhas restantes. Logo, a probabilidade é $n(n-1)/C(2n-1,n) = n(n-1)n!(n-1)!/(2n-1)! = (n-1)(n!)^2/(2n-1)!$.

3. Escreva problemas do tipo "soluções em inteiros de uma equação" equivalentes aos abaixo. Em seguida, para cada um, determine a função geradora correspondente.

   (a) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos i bolas na i-ésima caixa.

   (b) O número de multiconjuntos de 6 elementos tirados do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ tais que:
   - o número 1 pode aparecer no máximo duas vezes;
   - o número 5 deve aparecer no mínimo duas vezes.

   Para este problema, determine também a solução: o coeficiente de x^6 na função geradora.

   Solução:

   (a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, com $x_i \geq i$.
   FG: $(x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)\cdots(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots)$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, com $x_1 \le 2$, $x_2, x_3, x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 2$.
FG: $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots)^3(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$.
Como $(1+x+x^2)(1+x+x^2+\cdots)^3(x^2+x^3+x^4+\cdots) = (1-x^3)x^2(1+x+x^2+\cdots)^5 = (x^2 - x^5)(1 + x + x^2 + \cdots)^5$, o coeficiente de x^6 é $C(5-1+4,4) - C(5-1+1,1) = C(8,4) - C(5,1) = 70 - 5 = 65$.

4. Determine o número de maneiras de pintar 10 bolas idênticas, dadas as seguintes restrições:

- há 4 cores disponíveis: branca, amarela, azul e verde;
- as tintas azul e verde são suficientes para pintar no máximo 3 bolas (para cada uma das cores);
- existem tintas branca e amarela à vontade.

Dica: Use função geradora.

Solução: O número pedido é o número de soluções para a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \text{ para } x_1, x_2 \le 3 \text{ e } x_3, x_4 \ge 0.$$

A função geradora é, portanto, $(1+x+x^2+x^3)^2(1+x+x^2+\cdots)^2 = (1-x^4)^2(1+x+x^2+\cdots)^4$, que é igual a $[C(2,0) - C(2,1)x^4 + C(2,2)x^8][C(4-1+0,0) + C(4-1+1,1)x + C(4-1+2,2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^{10} é $C(2,0)C(4-1+10,10) - C(2,1)C(4-1+6,6) + C(2,2)C(4-1+2,2) = C(13,10) - 2C(9,6) + C(5,2) = 286 - 168 + 10 = 128$.

5. Encontre funções geradoras para:

(a) n.
(b) 2^n.
(c) $2^n - n$.
(d) $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k)$.

Solução:

(a) FG para n: $x[1/(1-x)]' = x/(1-x)^2$.
(b) FG para 2^n: $1/(1-2x)$.
(c) FG para $2^n - 2n$: $[1/(1-2x)] - x/(1-x)^2$.
(d) FG para $\sum_{k=0}^{n}(2^k - 2k)$: $[1/(1-2x)(1-x)] - x/(1-x)^3$.