Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — 2º semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Terceira Prova — 30/10/2013

Cada uma das 5 questões a seguir vale 3 pontos.

1. Um certo banco paga 6% de juros ao ano para um certo tipo de aplicação. Além disso, ele paga um bônus de 10% do investimento inicial ao final de cada ano (após computados os juros). Encontre uma relação de recorrência para o saldo após decorridos n anos, se não houver nenhum saque, e se o investimento inicial for de R\$ k.

2. Seja a_n o número de maneiras de dispor n bandeirinhas lado a lado, podendo cada bandeirinha ser de uma das cores: verde, amarelo ou azul. Determine uma relação de recorrência para a_n, supondo que *bandeirinhas adjacentes não podem ser ambas amarelas.*

3. Resolva a relação de recorrência:

   $a_0 = 0$, $a_1 = 3$;
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

4. Resolva a relação de recorrência:

   $a_0 = 0$, $a_1 = 3$;
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4.3^n$ para $n \geq 2$.

5. De quantas maneiras podemos permutar os 10 dígitos decimais de forma que nenhum dígito ímpar fique em sua posição natural? Considere que a posição natural de 0 é 0, a posição natural de 1 é 1, a posição natural de 2 é 2, e assim por diante. Por exemplo, o arranjo 0563912748 só tem em suas posições naturais os dígitos 0, 3 e 7.

Cada uma das 3 questões a seguir vale 1 ponto (são 2 pontos extra).

6. Seja novamente a_n o número de maneiras de dispor n bandeirinhas lado a lado, podendo cada bandeirinha ser de uma das cores: verde, amarelo ou azul. Determine uma relação de recorrência para a_n, supondo agora que *bandeirinhas adjacentes não podem ter a mesma cor.*

7. Resolva a relação de recorrência obtida na questão 1.

8. Quantos arranjos existem das letras AAAOOOXX em que não apareçam 3 letras consecutivas idênticas?

No verso estão algumas informações úteis para resolução de equações de recorrência.

Algumas informações úteis para resolução de equações de recorrência:

- Se uma equação característica tem uma raiz α_i de multiplicidade m, então ela contribue com m soluções: α_i^n, $n\alpha_i^n$, $n^2\alpha_i^n$, $\ldots$, $n^{m-1}\alpha_i^n$.
- Se $g(n)$ é a solução geral para a parte homogênea de uma relação de recorrência cuja parte não homogênea é $f(n)$, então $g(n) + p(n)$ é a solução geral para a parte recorrente. Para se obter $p(n)$:
  - se $f(n)$ é polinômio de ordem n, $p(n)$ é um polinômio de ordem n somado com a multiplicidade de 1 na equação caraterística;
  - se $f(n)$ é da forma α^n, $p(n)$ é da forma $An^k\alpha^n$, para algum A, sendo k a multiplicidade de α na equação característica.
- A solução para uma relação da recorrência da forma

  $a_0 = C$;
  $a_n = h(n)a_{n-1} + f(n)$ para $n \geq 1$;

  é $u_n v_n$, sendo a relação de recorrência para u_n:

  $u_0 = 1$;
  $u_n = h(n)a_{n-1}$ para $n \geq 1$;

  e para v_n:

  $v_0 = a_0$;
  $v_n = v_{n-1} + f(n)/u_n$ para $n \geq 1$.