Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG

Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013

Professor: Newton José Vieira

<u>Terceira Prova</u> — 30/10/2013

As 5 primeiras questões valem 3 pontos, e as últimas 3 questões valem 1 ponto cada uma.

1. Um certo banco paga 6% de juros ao ano para um certo tipo de aplicação. Além disso, ele paga um bônus de 10% do investimento inicial ao final de cada ano (após computados os juros). Encontre uma relação de recorrência para o saldo após decorridos n anos, se não houver nenhum saque, e se o investimento inicial for de R\$ k.

   Solução:

   $S_0 = k$,
   $S_n = 1,06S_{n-1} + 0,10k$ para $n \geq 1$.

2. Seja a_n o número de maneiras de dispor n bandeirinhas lado a lado, podendo cada bandeirinha ser de uma das cores: verde, amarelo ou azul. Determine uma relação de recorrência para a_n, supondo que *bandeirinhas adjacentes não podem ser ambas amarelas.*

   Solução:

   $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
   $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

   Veja: o primeiro termo conta as sequências em que a última banderinha é verde ou azul; o segundo conta as sequências em que a última é amarela e, com isto, a penúltima é verde ou azul.

3. Resolva a relação de recorrência:

   $a_0 = 0$, $a_1 = 3$;
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

   Solução:

   Equação característica: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Suas raízes são $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 2$. Logo, a solução geral para a parte recorrente é: $C_1(-1)^n + C_2 2^n$.

   Para as condições iniciais tem-se $C_1(-1)^0 + C_2 2^0 = 0$ e $C_1(-1)^1 + C_2 2^1 = 3$, de onde se segue que $C_1 = -1$ e $C_2 = 1$. Portanto, $a_n = (-1).(-1)^n + 1.2^n = 2^n + (-1)^{n+1}$.

4. Resolva a relação de recorrência:

   $a_0 = 0$, $a_1 = 3$;
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4.3^n$ para $n \geq 2$.

   Solução:

   A solução geral para a parte homogênea é (da questão 3): $g(n) = C_1(-1)^n + C_2 2^n$.

   A solução para a parte não homogênea é da forma $A3^n$. Assim, $A3^n - A3^{n-1} - 2A3^{n-2} = 4.3^n$. Segue-se que $A = 9$ e $p(n) = 3^{n+2}$.

   Logo, a solução geral para a parte recorrente é $g(n) + p(n) = C_1(-1)^n + C_2 2^n + 3^{n+2}$. Para as condições iniciais: $C_1(-1)^0 + C_2 2^0 + 3^{n+2} = 0$ e $C_1(-1)^1 + C_2 2^1 + 3^{n+2} = 3$. Tem-se, então, que $C_1 = 2$ e $C_2 = -11$. Portanto, $a_n = 3^{n+2} - 11.2^n + 2(-1)^n$.

5. De quantas maneiras podemos permutar os 10 dígitos decimais de forma que nenhum dígito ímpar fique em sua posição natural? Considere que a posição natural de 0 é 0, a posição natural de 1 é 1, a posição natural de 2 é 2, e assim por diante. Por exemplo, o arranjo 0563912748 só tem em suas posições naturais os dígitos 0, 3 e 7.

   Solução:

   Seja A_i o conjunto dos arranjos em que o dígito ímpar i aparece em sua posição natural. Pede-se, então, $N(\overline{A_1} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_9})$ Tem-se:

$$N(\overline{A_1} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_9}) = 10! - \left[\binom{5}{1}9! - \binom{5}{2}8! + \binom{5}{3}7! - \binom{5}{4}6! + \binom{5}{5}5!\right].$$

6. Seja novamente a_n o número de maneiras de dispor n bandeirinhas lado a lado, podendo cada bandeirinha ser de uma das cores: verde, amarelo ou azul. Determine uma relação de recorrência para a_n, supondo agora que *bandeirinhas adjacentes não podem ter a mesma cor*.

   Solução:

   $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
   $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$.

   Veja: a n-ésima cor é uma das **duas** diferentes da $n-1$-ésima. **Mas**, isto só vale se $n \geq 2$ (ou seja, existe cor anterior); logo, é preciso dizer que $a_1 = 3$ explicitamente.

7. Resolva a relação de recorrência obtida na questão 1.

   Solução:

   A solução para a parte homogênea é $g(n) = C_1(1,06)^n$.

   A solução para a parte não homogênea é um polinômio de grau zero, A. Substituindo na parte recorrente: $A - 1,06A = 0,1k$. Logo, $A = -0,1k/0,06 = -5k/3$. Logo, a solução da parte não homogênea é $p(n) = -5k/3$.

   Portanto, a solução geral da parte recorrente é $g(n) + p(n) = C_1(1,06)^n - 5k/3$.

   Como $S_0 = k$, $C_1(1,06)^0 - 5k/3 = k$ e, portanto, $C_1 = 8k/3$. Logo, $S_n = 8(1,06)^n k/3 - 5k/3 = [8(1,06)^n - 5]k/3$.

8. Quantos arranjos existem das letras AAAOOOXX em que não apareçam 3 letras consecutivas idênticas?

   Solução:

   Sejam A o conjunto dos arranjos em que aparecem 3 As consecutivos e O o conjunto dos arranjos em que aparecem 3 Os consecutivos.

   Então, $N(\overline{A} \cap \overline{O}) = N(U) - N(A \cup O)$. Logo,

$$N(\overline{A} \cap \overline{O}) = P(8;3,3,2) - \left[\binom{2}{1}P(6;3,2,1) - \binom{2}{2}P(4;2,1,1)\right].$$

   Portanto,

$$N(\overline{A} \cap \overline{O}) = \frac{8!}{6.6.2} - \left[2\frac{6!}{6.2} - \frac{4!}{2}\right] = 560 - 120 + 12 = 452.$$