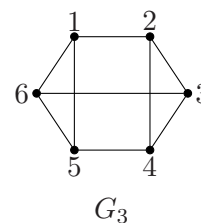
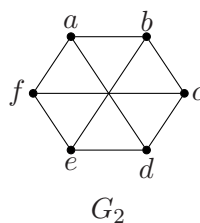
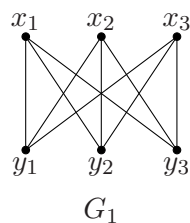
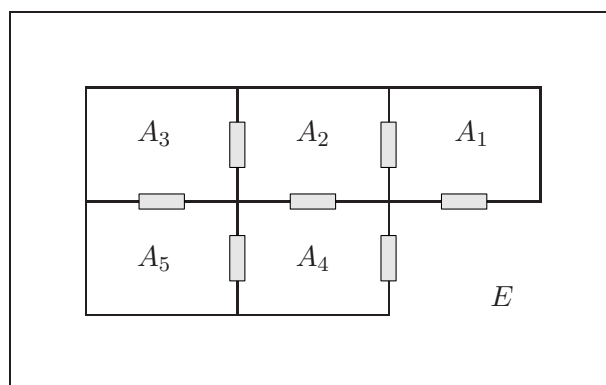


Cada questão vale 2 pontos.

1. Quantas arestas tem  $K_n$ ,  $K_n^c$ ,  $K_{m,n}$  e  $K_{m,n}^c$ ?
2. Quantas vértices tem um grafo simples regular de grau 3, se  $E = 3V - 15$ ?
3. Um certo grafo simples tem dois componentes conectados, um deles com 9 vértices e o outro com 10 vértices. Supondo que ambos os componentes são grafos regulares, um de grau 4 e outro de grau 5, quantas arestas tem o grafo no total?
4. Quais, dentre os três grafos a seguir, são isomorfos? Para os isomorfos, dê correspondência um para um (função bijetora entre os vértices). Para os não isomorfos, apresente uma justificativa mostrando que não são.



5. Um certo grafo simples planar tem 50 faces quando imerso no plano. Se ele for regular de grau 4, quantos vértices e arestas ele tem?
6. Considerando todos os grafos simples de 4 vértices, não isomorfos entre si, quais deles são, ao mesmo tempo, Eulerianos e Hamiltonianos?
7. A seguir está desenhada a planta de um estabelecimento em que se mostra 7 portas conectando 5 ambientes, denotados por  $A_1$  a  $A_5$ , e o exterior, denotado por  $E$ :



Determine o número mínimo de novas portas a instalar de forma que uma pessoa possa, ao chegar vindo do exterior (região  $E$ ), passar por cada porta exatamente uma vez e sair de volta para o exterior. Justifique modelando o problema por meio de grafo. Em que locais deve(m) ser instalada(s) a(s) nova(s) porta(s) (se o número mínimo de novas portas for maior que zero)?  $\Rightarrow$  **continua no verso**

8. Seja  $G$  um grafo de  $n$  vértices em que é possível rotular cada um dos  $n$  vértices com  $A$  ou  $B$  de forma que vértices adjacentes recebam rótulos diferentes. Em um caminho Hamiltoniano em  $G$ , quanto vértices têm o rótulo  $A$  e quantos têm o rótulo  $B$ ? E em um ciclo Hamiltoniano, quantos vértices têm o rótulo  $A$  e quantos o rótulo  $B$ ?

---

---

**Alguns lembretes:**

- Grafo simples: aquele que não tem laços nem arestas múltiplas.
- $K_n$ : grafo simples completo de  $n$  vértices.
- $K_{m,n}$ : grafo bipartite completo.
- $G^c$ : o complemento do grafo  $G$ .
- Grafo conectado: aquele para o qual existe caminho de cada vértice a qualquer outro.
- Componente conectado: subgrafo “maximal” conectado.
- Grafo regular: aquele em que todos os vértices têm o mesmo grau.
- Grafo planar: aquele que pode ser desenhado sem que suas arestas se cruzem, a não ser nas extremidades.
- Grafo Euleriano: aquele que tem circuito Euleriano.
- Grafo Hamiltoniano: aquele que tem ciclo Hamiltoniano.