

Cada questão vale 2 pontos.

1. Quantas arestas tem K_n , K_n^c , $K_{m,n}$ e $K_{m,n}^c$?

Solução:

K_n tem $n(n-1)/2$ arestas.
 K_n^c tem zero arestas.
 $K_{m,n}$ tem $m \times n$ arestas.
 $K_{m,n}^c$ tem $[m(m-1) + n(n-1)]/2$ arestas.

2. Quantas vértices tem um grafo simples regular de grau 3, se $E = 3V - 15$?

Solução:

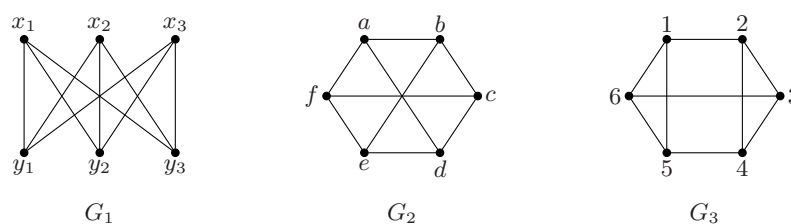
Para um grafo simples regular de grau 3, tem-se que $3V = 2E$. Logo, se $E = 3V - 15$, segue-se que $E = 2E - 15$ e, portanto, $E = 15$. Logo, $V = 10$.

3. Um certo grafo simples tem dois componentes conectados, um deles com 9 vértices e o outro com 10 vértices. Supondo que ambos os componentes são grafos regulares, um de grau 4 e outro de grau 5, quantas arestas tem o grafo no total?

Solução:

Como o número de vértices de grau ímpar em um grafo é par, o componente de 9 vértices não pode ser o grafo regular de grau 5. Logo, o componente de 9 vértices tem grau 4 e o componente de 10 vértices tem grau 5. Segue-se que o número arestas do grafo é $[9 \times 4/2] + [10 \times 5/2] = 18 + 25 = 43$.

4. Quais, dentre os três grafos a seguir, são isomorfos? Para os isomorfos, dê correspondência um para um (função bijetora entre os vértices). Para os não isomorfos, apresente uma justificativa mostrando que não são.



Solução:

G_1 e G_2 são isomorfos. Uma função bijetora f é aquela tal que:

$$f(x_1) = a, f(x_2) = c, f(x_3) = e, f(y_1) = b, f(y_2) = d, f(y_3) = f.$$

G_1 (e também G_2) não é isomorfo a G_3 , pois:

- G_1 (e também G_2), que é $K_{3,3}$, não é planar;
- e G_3 é planar: no desenho a acima, a aresta $\{3,6\}$ pode ser desenhada por fora, obtendo-se uma imersão no plano.

5. Um certo grafo simples planar tem 50 faces quando imerso no plano. Se ele for regular de grau 4, quantos vértices e arestas ele tem?

Solução:

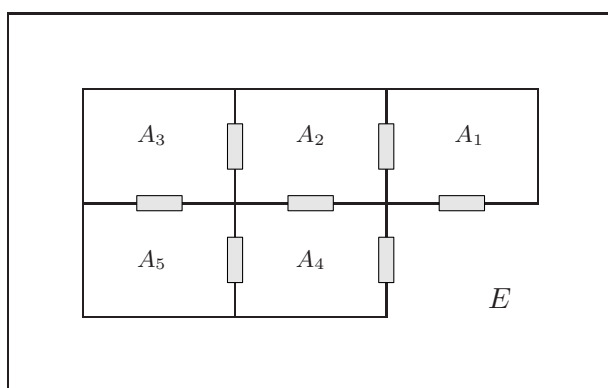
Como o grafo é regular de grau 4, segue-se que $4V = 2E$ e, assim $E = 2V$. Pela fórmula de Euler, $V - E + F = 2$. Logo, $V - 2V + 50 = 2$ e, portanto, $V = 48$. Segue-se que $E = 96$.

6. Considerando todos os grafos simples de 4 vértices, não isomorfos entre si, quais deles são ambos, Eulerianos e Hamiltonianos?

Solução:

Apenas $K_{2,2}$ é ambos, Euleriano e Hamiltoniano.

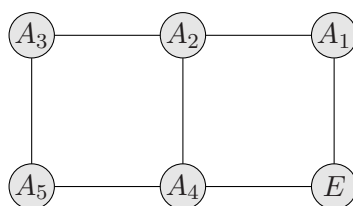
7. A seguir está desenhada a planta de um estabelecimento em que se mostra 7 portas conectando 5 ambientes, denotados por A_1 a A_5 , e o exterior, denotado por E :



Determine o número mínimo de novas portas a instalar de forma que uma pessoa possa, ao chegar vindo do exterior (região E), passar por cada porta exatamente uma vez e sair de volta para o exterior. Justifique modelando o problema por meio de grafo. Em que locais deve(m) ser instalada(s) a(s) nova(s) porta(s) (se o número mínimo de novas portas for maior que zero)?

Solução:

Considerando um vértice para cada ambiente e uma aresta para cada porta, o problema pode ser modelado por meio do grafo:



Para que todos os vértices de tal grafo fiquem com grau par, e portanto ele se torne um grafo Euleriano, deve-se inserir no mínimo uma aresta com extremidades A_2 e A_4 , o que corresponde a colocar mais uma porta entre os ambientes A_2 e A_4 .

8. Seja G um grafo de n vértices em que é possível rotular cada um dos n vértices com A ou B de forma que vértices adjacentes recebam rótulos diferentes. Em um caminho Hamiltoniano em G , quanto vértices têm o rótulo A e quantos têm o rótulo B ? E em um ciclo Hamiltoniano, quantos vértices têm o rótulo A e quantos o rótulo B ?

Solução:

Se n for par, um caminho Hamiltoniano tem $n/2$ vértices com rótulo A e $n/2$ com rótulo B ; se n for ímpar, um caminho Hamiltoniano tem $(n - 1)/2$ de um tipo e $(n + 1)/2$ do outro. Por outro lado, um ciclo Hamiltoniano só pode existir se n for par, e, neste caso, um ciclo Hamiltoniano tem $n/2$ vértices de um tipo e $(n/2) + 1$ do outro (já que o vértice de início é o mesmo que aparece no fim).