

# INDUÇÃO MATEMÁTICA BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 1

Newton José Vieira  
UFMG

11 de setembro de 2007

## Um Algoritmo de Ordenação

Entrada: um vetor  $v$  com  $n$  números inteiros.  
Saída: o mesmo vetor em ordem crescente.

```
para i de 1 a n-1 faça
  menor := v[i]; m := i;
  para j de i+1 a n faça
    se v[j] < menor então
      menor := v[j]; m := j;
  fimse
fimpara;
v[i] := v[m] {"troca valores de v[i] e v[m]"}
fimpara
```

## O Desempenho do Algoritmo

- Número de comparações:

$$NC(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1.$$

## O Desempenho do Algoritmo

- Número de comparações:

$$NC(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1.$$

- Uma maneira de achar uma fórmula para  $NC(n)$ :

1. Conjecturar uma fórmula  $f(n)$ .
2. Provar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad NC(n) = f(n)$$

usando indução matemática.

## A "lógica" da indução matemática

Para provar  $\forall x P(x)$ , quando o universo é  $\mathbf{N}$ :

- **Base lógica:**

$$P(0) \wedge \forall x (P(x) \Rightarrow P(x + 1)) \models \forall x P(x).$$

- **Método:**

1. **Passo base:** provar  $P(0)$ ;
2. **Passo da indução:** provar  $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x + 1))$ .

## Princípio da Indução Matemática (Frac)

- Para provar  $\forall n P(n)$  para todo  $n \geq q$ , é suficiente mostrar que:

1.  $P(q)$  é verdadeira;
2. se  $k \geq q$  e se  $P(k)$  é verdadeira, então  $P(k + 1)$  também é verdadeira.

## Princípio da Indução Matemática (Frac)

- Para provar  $\forall n P(n)$  para todo  $n \geq q$ , é suficiente mostrar que:

1.  $P(q)$  é verdadeira;
2. se  $k \geq q$  e se  $P(k)$  é verdadeira, então  $P(k + 1)$  também é verdadeira.

- **Passo 1: passo base.**

- **Passo 2: passo da indução.**

- A suposição que  $P(k)$  é verdadeira no **passo da indução:**  
**hipótese de indução.**

## Exemplos

- $\sum_{k=1}^n k = n(n + 1)/2$ .
- $\sum_{k=1}^n 1/[k(k + 1)] = n/(n + 1)$ .
- Qualquer postagem maior ou igual a 8 centavos pode ser feita utilizando apenas selos de 3 e de 5 centavos.
- Existem  $2^n$  seqüências binárias de  $n$  dígitos.
- Sejam  $n$  retas dividindo o plano em regiões. É possível pintar as regiões com as cores preta e branca de forma que regiões adjacentes não fiquem com a mesma cor.

## Princípio da Indução Matemática (Forte)

- Para provar  $\forall n P(n)$  para todo  $n \geq q$ , é suficiente mostrar que:
  1.  $P(i)$  é verdadeira para  $q \leq i \leq r$ ;
  2. se  $k \geq r$  e se  $P(i)$  é verdadeira para  $i \leq k$ , então  $P(k + 1)$  também é verdadeira.

## Princípio da Indução Matemática (Forte)

- Para provar  $\forall n P(n)$  para todo  $n \geq q$ , é suficiente mostrar que:
  1.  $P(i)$  é verdadeira para  $q \leq i \leq r$ ;
  2. se  $k \geq r$  e se  $P(i)$  é verdadeira para  $i \leq k$ , então  $P(k + 1)$  também é verdadeira.
- Passo 1: **passo base.**
- Passo 2: **passo da indução.**
- A suposição que  $P(i)$  é verdadeira para  $i \leq k$ :  
**hipótese de indução.**

## Exemplos

- Qualquer número natural maior que 1 pode ser fatorado como um produto de primos.
- Seja a seqüência de Fibonacci, definida por:
 
$$a_1 = 1, a_2 = 1, \text{ e } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$
 Esta é uma definição **recursiva** ou **indutiva**.

$$\text{Para } n \geq 1, a_n \leq [(1 + \sqrt{5})/2]^n.$$

## Uma demonstração incorreta

**Teorema:** “Em uma coleção de  $n$  bolas, todas são da mesma cor”.

**Prova:**

Evidentemente, se a coleção tem apenas uma bola, toda bola tem a mesma cor. Seja  $n \geq 1$ . Hipótese de indução: em uma coleção de  $n$  bolas todas têm a mesma cor. Seja, então, uma coleção de  $n + 1$  bolas. Observe a seguinte figura ilustrando as  $n + 1$  bolas:



Pela hipótese de indução, as primeiras  $n$  bolas têm a mesma cor, assim como as  $n$  últimas. Como as bolas na interseção têm a mesma cor, as  $n + 1$  bolas têm a mesma cor.

**Qual o problema com esta prova?**

**FIM**