

# COMBINATÓRIA ELEMENTAR BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 2

Newton José Vieira  
UFMG

23 de setembro de 2007

## PROBLEMAS BÁSICOS DE COMBINATÓRIA

### SUMÁRIO

- Problemas Básicos de Combinatória
- As Regras da Soma e do Produto
- O Modelo de Amostragem
- O Modelo de Distribuição
- Exemplos e Aplicações
- O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação
- Uma Breve Visita às Identidades Combinatórias

### O QUE É COMBINATÓRIA

- **Combinatória:** “a arte de contar sem contar”.
- **Idéia básica:** correspondência um-para-um (função bijetora).
- **Exemplo 1:**

Seja um conjunto  $A$  de  $n$  elementos. Existe uma correspondência um-para-um de  $\mathcal{P}(A)$  para o conjunto das sequências binárias de  $n$  dígitos. Como o número destas sequências é  $2^n$ ,  $\mathcal{P}(A)$  tem  $2^n$  elementos.

## O QUE É COMBINATÓRIA

- **Combinatória:** “a arte de contar sem contar”.
- **Idéia básica:** correspondência um-para-um (função bijetora).
- **Exemplo 2:**

Seja o conjunto de caminhos da raiz às folhas, para uma árvore estritamente binária e completa de altura  $n$ . Existe uma correspondência um-para-um de tal conjunto para o conjunto das seqüências binárias de  $n$  dígitos:



Logo, o número de folhas da árvore é  $2^n$ .

## O QUE É COMBINATÓRIA

- **Combinatória:** “a arte de contar sem contar”.
- **Idéia básica:** correspondência um-para-um (função bijetora).
- **Exemplo 3:**

Existe uma correspondência um-para-um das linhas da tabela da verdade para o conjunto das seqüências binárias de  $n$  dígitos. Logo, o número de linhas de uma tabela da verdade para  $n$  variáveis proposicionais é  $2^n$ .

## O QUE É COMBINATÓRIA

- **Outra formulação do problema do número de seqüências binárias de  $r$  dígitos:**

Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{0, 1\}$ , se **ordem é importante** e **repetição é permitida**?

## O QUE É COMBINATÓRIA

- **Outra formulação do problema do número de seqüências binárias de  $r$  dígitos:**

Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{0, 1\}$ , se **ordem é importante** e **repetição é permitida**?

- **Generalização do problema:**

Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se **ordem é importante** e **repetição é permitida**?

## OBJETIVOS

Os dois objetivos:

- Identificar problemas gerais aos quais muitos outros possam ser reduzidos.
- Praticar a “arte de contar sem contar”.

## Abstração de mais 3 problemas básicos

• Problema:

Um torneio de natação vai ser disputado por 8 atletas. Quantas possibilidades de premiação existem, considerando que só recebem prêmios o primeiro (medalha de ouro), o segundo (medalha de prata) e o terceiro (medalha de bronze) lugares?

## Abstração do segundo problema básico

• Problema:

Um torneio de natação vai ser disputado por 8 atletas. Quantas possibilidades de premiação existem, considerando que só recebem prêmios o primeiro (medalha de ouro), o segundo (medalha de prata) e o terceiro (medalha de bronze) lugares?

• Problema geral:

Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se **ordem é importante** e **repetição não é permitida**?

## Abstração do terceiro problema básico

• Problema:

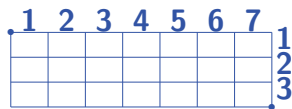
Quantos caminhos existem do ponto no canto superior esquerdo ao ponto no canto inferior direito?



### Abstração do terceiro problema básico

- Problema:

Quantos caminhos existem do ponto no canto superior esquerdo ao ponto no canto inferior direito?



- Problema geral:

Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se **ordem não é importante e repetição não é permitida**?

### Abstração do quarto problema básico

- Problema:

Quantos dominós existem?

### Abstração do quarto problema básico

- Problema:

Quantos dominós existem?

- Problema geral:

Quantas **amostras** de  $r$  objetos podem ser extraídas do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se **ordem não é importante e repetição é permitida**?

AS REGRAS DA SOMA E DO PRODUTO

## A REGRA DA SOMA

- Regra da soma:

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos disjuntos (isto é, que não ocorrem ao mesmo tempo), tais que  $A$  ocorre de  $m$  maneiras e  $B$  ocorre de  $n$  maneiras. Então o evento  $A$  ou  $B$  ocorre de  $m + n$  maneiras.

## A REGRA DA SOMA

- Regra da soma:

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos disjuntos (isto é, que não ocorrem ao mesmo tempo), tais que  $A$  ocorre de  $m$  maneiras e  $B$  ocorre de  $n$  maneiras. Então o evento  $A$  ou  $B$  ocorre de  $m + n$  maneiras.

- Exemplos:

- Quantas maneiras existem de retirar um ás ou uma dama de um baralho?
- Quantas maneiras existem de retirar um ás ou uma carta vermelha?

## A REGRA DO PRODUTO

- Regra do produto:

Suponha que um evento  $C$  possa ser decomposto em duas etapas  $A$  e  $B$ , tais que  $A$  ocorre de  $m$  maneiras e  $B$  ocorre de  $n$  maneiras, independentemente de  $A$ . Então o evento  $C$  ocorre de  $m \times n$  maneiras.

## A REGRA DO PRODUTO

- Regra do produto:

Suponha que um evento  $C$  possa ser decomposto em duas etapas  $A$  e  $B$ , tais que  $A$  ocorre de  $m$  maneiras e  $B$  ocorre de  $n$  maneiras, independentemente de  $A$ . Então o evento  $C$  ocorre de  $m \times n$  maneiras.

- Exemplos:

- Quantas maneiras existem de distribuir um ás vermelho e, em seguida, outra carta vermelha?
- Quantas maneiras existem de distribuir um ás e, em seguida, uma carta vermelha?
- Quantas sequências binárias de  $n$  dígitos existem?

## O Problema do Aniversário

- Qual é a probabilidade de que pelo menos duas dentre  $n$  pessoas selecionadas ao acaso façam aniversário no mesmo dia do ano?
- Espaço amostral:  $S = \{1/1, 1/2, \dots, 12/12\}^n$ ;  $N(S) = 365^n$ .
- Número de maneiras de atribuir aniversários de forma que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia:  
 $N(E) = N(S) - m$ , onde  $m$  é o número de maneiras de atribuir aniversários sem que pessoas façam aniversário no mesmo dia.  
 $m = 365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n - 1))$ .

- Logo:

$$\text{prob}(E) = \frac{365^n - 365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n - 1))}{365^n}$$

## O Problema do Aniversário

- Qual é a probabilidade de que pelo menos duas dentre  $n$  pessoas selecionadas ao acaso façam aniversário no mesmo dia do ano?

$$\text{prob}(E) = \frac{365^n - 365 \times 364 \times \dots \times (365 - (n - 1))}{365^n}$$

- $n \geq 23 \Rightarrow \text{prob} > 0,5$ .

$$n = 30 \Rightarrow \text{prob} > 0,7.$$

## O MODELO DE AMOSTRAGEM

## O modelo de amostragem

- Quantas amostras de  $r$  objetos podem ser extraídas de um conjunto de  $n$  objetos?

A resposta depende de:

- **Ordem** é importante?
- **Repetição** é importante?

## O modelo de amostragem

Exemplo: amostras de 2 objetos de  $\{x_1, x_2, x_3\}$ :

	com reposição (com repetição)	sem reposição (sem repetição)
<b>arranjo</b> (ordem importante)	$x_1x_1$ $x_1x_2$ $x_1x_3$ $x_2x_1$ <b>sequência</b> $x_2x_2$ $x_2x_3$ $x_3x_1$ $x_3x_2$ $x_3x_3$	$x_1x_2$ $x_1x_3$ $x_2x_1$ $x_2x_3$ <b>permutação</b> $x_3x_1$ $x_3x_2$
	$\{x_1, x_1\}$ $\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ <b>multiconjunto</b> $\{x_2, x_2\}$ $\{x_2, x_3\}$ $\{x_3, x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_3\}$ <b>combinação</b>

## Soluções dos 4 Problemas

- Número de **sequências** de tamanho  $r$ :  
 $n^r$ .
- Número de **permutações** de tamanho  $r$ :  
 $P(n, r) = n(n - 1) \cdots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ .
- Número de **combinações** de tamanho  $r$ :  
 $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .
- Número de **multiconjuntos** de tamanho  $r$ :  
 $C(n - 1 + r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$ .

## Exemplos

- Número de arranjos das cartas de um baralho:  
 $P(52, 52) = 52! \approx 7,96 \times 10^{67}$ .
- Número de resultados possíveis no lançamento de 3 dados:  
 $6^3 = 216$ .
- Número de dominós:  
 $C(7 - 1 + 2, 2) = C(8, 2) = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ .
- Número de mãos de 5 cartas, no baralho:  
 $C(52, 5) = 2.598.960$ .

## Exemplos

- Probabilidade de ocorrer um *flush* (5 cartas do mesmo naipe) no pôquer:  
 $\frac{\text{número de flushes}}{\text{número de mãos de 5 cartas}} = \frac{4 \times C(13, 5)}{C(52, 5)} = 0,00198$ .
- Número de arranjos com as letras da palavra "banana":  
 $C(6, 3) \times C(3, 2) \times 1 = 60$ .

## O MODELO DE DISTRIBUIÇÃO

### O modelo de distribuição

- De quantas maneiras  $r$  bolas podem ser distribuídas em  $n$  caixas distintas?

A resposta depende de:

- As bolas são distintas ou idênticas?
- Cada caixa comporta qualquer número de bolas, ou apenas uma bola?

### O modelo de distribuição

Exemplo: distribuição de 2 bolas em 3 caixas:

	ocupação não exclusiva			ocupação exclusiva		
	caixa 1	caixa 2	caixa 3	caixa 1	caixa 2	caixa 3
bolas distintas	$B_1B_2$			$B_1$	$B_2$	
	$B_1$	$B_2$		$B_1$		$B_2$
	$B_1$		$B_2$	$B_2$	$B_1$	
	$B_2$	$B_1$			$B_1$	$B_2$
		$B_1B_2$		$B_2$		$B_1$
		$B_1$	$B_2$		$B_2$	$B_1$
	$B_2$		$B_1$			
		$B_2$	$B_1$			
bolas idênticas	$BB$			$B$	$B$	
	$B$	$B$		$B$		$B$
	$B$		$B$		$B$	$B$
		$BB$				
		$B$	$B$			
			$BB$			
			$B$			
			$BB$			

### Soluções dos 4 Problemas:

- Número de distribuições de  $r$  bolas distintas em  $n$  caixas:  
 $n^r$ .
- Número de distribuições de  $r$  bolas distintas em  $n$  caixas, 1 bola por caixa:  
 $P(n, r)$ .
- Número de distribuições de  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas:  
 $C(n - 1 + r, r)$ .
- Número de distribuições de  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas, 1 bola por caixa:  
 $C(n, r)$ .

## 2 problemas de distribuição em caixas idênticas

- Número de distribuições de  $r$  **bolas distintas** em  $n$  **caixas idênticas**:

É o número de partições do conjunto  $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$  em, no máximo,  $n$  subconjuntos. Exemplo para  $r = 4$  e  $n = 3$ :

$$\begin{array}{l} \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \\ \{b_1\}\{b_2, b_3, b_4\} \\ \{b_2\}\{b_1, b_3, b_4\} \\ \{b_3\}\{b_1, b_2, b_4\} \\ \{b_4\}\{b_1, b_2, b_3\} \\ \{b_1, b_2\}\{b_3, b_4\} \\ \{b_1, b_3\}\{b_2, b_4\} \\ \{b_1, b_4\}\{b_2, b_3\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \{b_1\}\{b_2\}\{b_3, b_4\} \\ \{b_1\}\{b_3\}\{b_2, b_4\} \\ \{b_1\}\{b_4\}\{b_2, b_3\} \\ \{b_2\}\{b_3\}\{b_1, b_4\} \\ \{b_2\}\{b_4\}\{b_1, b_3\} \\ \{b_3\}\{b_4\}\{b_1, b_2\} \end{array}$$

## EXEMPLOS E APLICAÇÕES

## 2 problemas de distribuição em caixas idênticas

- Número de distribuições de  $r$  **bolas idênticas** em  $n$  **caixas idênticas**:

É o número de partições do inteiro positivo  $r$  em, no máximo,  $n$  partes. (Uma partição de um inteiro positivo  $r$  é uma maneira de escrever  $r$  como uma soma de inteiros positivos, chamados partes, em ordem decrescente.) Exemplo para  $r = 4$  e  $n = 3$ :

$$\begin{array}{ll} \{b, b, b, b\} & (4) \\ \{b\}\{b, b, b\} & (3 + 1) \\ \{b, b\}\{b, b\} & (2 + 2) \\ \{b\}\{b\}\{b, b\} & (2 + 1 + 1) \end{array}$$

## Jogos de Azar

Supondo apostas simples, no jogo da sena:

- Probabilidade de acertar a sena:

$$\frac{1}{C(60, 6)} = \frac{1}{50.063.860}$$

- Probabilidade de acertar a quina:

$$\frac{C(6, 5) \times C(54, 1)}{C(60, 6)} = \frac{1}{154.518}$$

- Probabilidade de acertar a quadra:

$$\frac{C(6, 4) \times C(54, 2)}{C(60, 6)} = \frac{1}{2.332}$$

## Jogos de Azar

No jogo de pôquer:

- Probabilidade de sair com um *full house* (um trio e um par):

$$\frac{(C(13, 1) \times C(4, 3)) \times (C(12, 1) \times C(4, 2))}{C(52, 5)} \approx 0.0014\dots$$

## Coeficientes Multinomiais

- Número de maneiras de arranjar as letras da palavra BANANA:

$$C(6, 1) \times C(5, 2) \times C(3, 3) = \frac{6!}{1! \times 2! \times 3!}$$

- Problema Geral: Número de arranjos de  $n$  objetos,  $r_1$  do tipo 1,  $r_2$  do tipo 2,  $\dots$ ,  $r_k$  do tipo  $k$ , sendo  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ :

$$P(n; r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

## Coeficientes Multinomiais

- Número de maneiras de distribuir as 52 cartas do baralho entre 4 jogadores, se cada um recebe 13 cartas:

$$C(52, 13) \times C(39, 13) \times C(26, 13) \times C(13, 13)$$

- Problema Geral: Número de seleções simultâneas de tamanhos  $r_1, r_2, \dots, r_k$  a partir de um conjunto de  $n$  objetos, sendo  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ :

$$C(n; r_1, r_2, \dots, r_k) = P(n; r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

## Estratégias com Arranjos

Número de arranjos das letras de “JARDIM”,

- com vogais em ordem alfabética.

Estratégia:

- seleção das posições das vogais  $\implies C(6, 2)$
- restrição de ordem para A e I  $\implies 1$
- arranjo das consoantes  $\implies 4!$

Resposta:  $C(6, 2) \times 1 \times 4! = 360$ .

## Estratégias com Arranjos

Número de arranjos das letras de “JARDIM”,

- com vogais consecutivas.

Estratégia:

- construção de “supervogais” AI e IA  $\implies 2$
- arranjo das consoantes e uma supervogal  $\implies 5!$

Resposta:  $2 \times 5! = 240$ .

## Estratégias com Arranjos

Número de arranjos das letras de “JARDIM”,

- sem vogais consecutivas.

Estratégia:

- arranjo de 2 V's e 4 C's sem V's consecutivos:
  - \* começamos com  $\diamond V \diamond C V \diamond$ ;
  - \* os 3 C's restantes podem ser colocados em qualquer uma das 3 regiões marcadas  $\implies C(3 - 1 + 3, 3) = 10$
- substituição de V's e C's por vogais e consoantes  $\implies 2! \times 4! = 48$

Resposta:  $10 \times 48 = 480$ .

## O PROBLEMA DAS SOLUÇÕES INTEIRAS DE UMA EQUAÇÃO

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação

- Quantas soluções inteiras existem para

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10, \text{ com } x_i \geq 0?$$

- Problemas equivalentes:

- Número de maneiras de selecionar  $r$  objetos dentre  $n$  objetos, com repetições permitidas.
- Número de maneiras de distribuir  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas distintas, com qualquer número de bolas por caixa.
- Número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \text{ com } x_i \geq 0.$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 99, \text{ com } x_i \geq 0$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 99, \text{ com } x_i \geq 0$$

é a soma dos números de soluções para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

⋮

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 99.$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 99, \text{ com } x_i \geq 0$$

é a soma dos números de soluções para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

⋮

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 99.$$

É também o número de soluções para

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 99.$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \text{ com } x_i \geq 0$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \text{ com } x_i \geq 0$$

é o número de soluções para

$$y + x_2 + x_3 = 4, \text{ com } y = 0, 2, 4, \dots \text{ e } x_2, x_3 \geq 0.$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \text{ com } x_i \geq -5$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \text{ com } x_i \geq -5$$

é o número de soluções para

$$(y_1 - 5) + (y_2 - 5) + (y_3 - 5) = 0, \text{ com } y_i \geq 0,$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \text{ com } x_i \geq -5$$

é o número de soluções para

$$(y_1 - 5) + (y_2 - 5) + (y_3 - 5) = 0, \text{ com } y_i \geq 0,$$

ou seja, o número de soluções para

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15, \text{ com } y_i \geq 0,$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O Problema dos Dados de Galileu(1564–1643): Por que uma soma de 10 aparece tão frequentemente no lançamento de 3 dados?

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O Problema dos Dados de Galileu(1564–1643): Por que uma soma de 10 aparece tão frequentemente no lançamento de 3 dados?

Probabilidade de que o lançamento de 3 dados produza uma soma de 10:

$$\frac{\text{número de soluções para } x_1 + x_2 + x_3 = 10, \text{ com } 1 \leq x_i \leq 6}{6^3}$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de seleções de  $r$  objetos dentre  $n$ , sem repetições, é igual ao número de distribuições de  $r$  bolas idênticas em  $n$  caixas, uma bola por caixa. Isto é igual também ao número de soluções inteiras para:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \text{ com } x_i \in \{0, 1\},$$

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de maneiras de totalizar  $r$  centavos utilizando moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos é o número de soluções inteiras para:

## O Problema das Soluções Inteiras de uma Equação/Exemplos

- O número de maneiras de totalizar  $r$  centavos utilizando moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos é o número de soluções inteiras para:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r, \text{ com } \begin{cases} x_1 = 0, 1, 2, \dots \\ x_2 = 0, 5, 10, \dots \\ x_3 = 0, 10, 20, \dots \\ x_4 = 0, 25, 50, \dots \end{cases}$$

## UMA BREVE VISITA ÀS IDENTIDADES COMBINATÓRIAS

## Identidades Combinatórias

### Argumentos combinatórios:

- são usualmente **mais simples** que indução ou álgebra;
- ajuda-nos a lembrar do **conteúdo** da identidade.

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- **Identidade de Pascal:**

$$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$$

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- Identidade de Pascal:

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r)$$

**Prova:** 2 maneiras de contar os mesmos subconjuntos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

1.  $C(n, r)$ : número de subconjuntos de  $r$  elementos.
2.  $C(n - 1, r - 1)$ : número de subconjuntos de  $r$  elementos que contêm  $x_n$ .  
 $C(n - 1, r)$ : número de subconjuntos de  $r$  elementos que não contêm  $x_n$ .

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- Número de subconjuntos:

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$$

**Prova:** 2 maneiras de contar todos os subconjuntos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- Número de subconjuntos:

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$$

**Prova:** 2 maneiras de contar todos os subconjuntos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

1.  $2^n$ : número total de subconjuntos (como já vimos).
2.  $C(n, 0)$ : número de subconjuntos de 0 elementos.  
 $C(n, 1)$ : número de subconjuntos de 1 elemento.  
 $\vdots$   
 $C(n, n)$ : número de subconjuntos de  $n$  elementos.

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- Grupos e líderes:

$$C(n, k)C(k, r) = C(n, r)C(n - r, k - r)$$

**Prova:** 2 maneiras de contar todas as maneiras de se selecionar, a partir de um universo de  $n$  pessoas, um grupo de  $k$  pessoas e  $r$  líderes dentre estas  $k$  pessoas:

1.  $C(n, k)$ : número de grupos de  $k$  pessoas.  
 $C(k, r)$ : número de líderes dentre  $k$  pessoas.
2.  $C(n, r)$ : número de grupos de  $r$  líderes.  
 $C(n - r, k - r)$ : número de grupos para certo conjunto de  $r$  líderes.

## Exemplos de Identidades Combinatórias

### • Multiconjuntos:

$$\sum_{i=0}^r C(n+i, i) = C(n+r+1, r)$$

**Prova:** 2 maneiras de contar todos os multiconjuntos de tamanho  $r$ , com elementos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\}$ :

1.  $C(n+2-1+r, r) = C(n+r+1, r)$ :  
número total de multiconjuntos de tamanho  $r$  (como já vimos).

## Exemplos de Identidades Combinatórias

$$2. C(n+1-1+r, r) = C(n+r, r):$$

número de multiconjuntos de tamanho  $r$  sem ocorrências de  $x_{n+2}$ .

$$C(n+1-1+r-1, r-1) = C(n+r-1, r-1):$$

número de multiconjuntos de tamanho  $r$  com 1 ocorrência de  $x_{n+2}$ .

⋮

$$C(n+1-1+r-r, r-r) = C(n, 0):$$

número de multiconjuntos de tamanho  $r$  com  $r$  ocorrências de  $x_{n+2}$ .

## Exemplos de Identidades Combinatórias

### • Teorema Binomial:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n C(n, r)x^{n-r}y^r$$

**Prova:** Dado que

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdots (x+y)}_n$$

cada termo do resultado é da forma  $x^{n-r}y^r$ ,  $0 \leq r \leq n$ . O número de termos desta forma é o número de maneiras de selecionar  $n-r$   $x$ 's (ou  $r$   $y$ 's), ou seja,  $C(n, n-r) = C(n, r)$ .

## Exemplos de Identidades Combinatórias

### Exemplos de uso do Teorema Binomial:

$$-\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n.$$

**Prova:** basta fazer  $x = y = 1$ .

$$-C(n, 0) + C(n, 2) + \cdots = C(n, 1) + C(n, 3) + \cdots = 2^{n-1}$$

**Prova:** fazendo-se  $x = 1$  e  $y = -1$ , tem-se:

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - C(n, 3) + \cdots + (-1)^n C(n, n) = 0$$

## Exemplos de Identidades Combinatórias

- Teorema Multinomial:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1 + \cdots + r_k = n} C(n; r_1, \dots, r_k) x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$$

Prova: Dado que

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + \cdots + x_k)}_n$$

cada termo do resultado é da forma  $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ , sendo  $r_1 + \cdots + r_k = n$ . O número de termos desta forma é o número de maneiras de selecionar  $r_1$   $x_1$ 's,  $\dots$ ,  $r_k$   $x_k$ 's, totalizando um total de  $n$  destes objetos, ou seja,  $C(n; r_1, r_2, \dots, r_k)$ .

FIM