FUNÇÕES GERADORAS
BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 3

Newton José Vieira

UFMG

22 de outubro de 2007

SUMÁRIO

FUNÇÕES GERADORAS

Um exemplo

Duas maneiras de determinar o número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 = r, \text{ com } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ e } 1 \leq x_2 \leq 2:$$

1. Enumeração explícita:

$x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in \{1, 2\}$

x_1	x_2	r
0	1	1
0	2	2
1	1	2
1	2	3

Um exemplo

Duas maneiras de determinar o número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 = r, \text{ com } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ e } 1 \leq x_2 \leq 2:$$

2. Multiplicação de **polinômios**:

$$\begin{aligned}(x^0 + x^1)(x^1 + x^2) &= x^0x^1 + x^0x^2 + x^1x^1 + x^1x^2 \\ &= x^1 + x^2 + x^2 + x^3 \\ &= 1x^1 + 2x^2 + 1x^3\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ coeficiente de x^i: número de soluções para $r = i$.

Outro exemplo

Determinar o número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 = r, \text{ com } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0:$$

- Enumeração explícita:

	x_1	x_2	r
	0	r	r
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	1	$r-1$	r
		$\vdots$	
	r	0	r

$\Longrightarrow$ Número de soluções: $r + 1$.

Exemplo

- Raciocínio polinomial:

$$(x^0 + x^1 + \cdots)(x^0 + x^1 + \cdots) = x^0x^0 + x^0x^1 + \cdots + x^1x^0 + x^1x^1 + \cdots$$

$\Longrightarrow$ Número de soluções: coeficiente de x^r.

- Determinando o coeficiente de x^r:

$$x^0x^r + x^1x^{r-1} + \cdots + x^rx^0 = (r+1)x^r$$

Série de potências

- Uma **série de potências** é uma série infinita da forma

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$

sendo cada a_i um número real e x uma variável.

- **Multiplicação**: o coeficiente de x^r em

$$(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots)$$

é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0$

- **Adição**: o coeficiente de x^r em

$$(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) + (b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots)$$

é $a_r + b_r$.

Um exemplo

- $(x^0 + x^1)(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots) = x^0 + 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$

Definição

- **A função geradora ordinária** para um problema combinatório de solução a_r é

$$g(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$

Exemplo

- Número de soluções inteiras para

$$x_1 + x_2 = r, \text{ com } 0 \le x_1 \le 1 \text{ e } 1 \le x_2 \le 2:$$

  - $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$, e para $r > 3$ $a_r = 0$.
  - Portanto, a função geradora é

$$0x^0 + 1x^1 + 2x^2 + 1x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^r + \cdots$$
$$= x + 2x^2 + x^3.$$

Exemplo

- Função geradora para o número de subconjuntos de tamanho r, tomados de um conjunto de tamanho n:

$$C(n,0)x^0 + C(n,1)x^1 + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n$$

que é $(1+x)^n$, pelo Teorema Binomial.

Estratégia

Estratégia para resolver problemas usando função geradora:

1. Encontrar uma função geradora para o problema geral.
2. Extrair o coeficiente apropriado.

MODELAGEM DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES GERADORAS

Abordagem

1. Reformular o problema como um problema de encontrar o número de soluções inteiras para:
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \text{ com } x_i \in \{v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots\}.$$
2. O número de soluções é o coeficiente de x^r em:
$$(x^{v_{1,1}} + x^{v_{1,2}} + \cdots)(x^{v_{2,1}} + x^{v_{2,2}} + \cdots) \cdots (x^{v_{n,1}} + x^{v_{n,2}} + \cdots).$$

Exemplo

- Função geradora para o problema de encontrar o número de soluções inteiras de:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = r, \text{ com } x_i \geq 0:$$
  1. Reformulação do problema: encontrar o número de soluções inteiras para:
  $$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = r, \text{ com } y_i \in \{0, i, 2i, 3i, \ldots\}.$$
  2. A função geradora é, portanto:
  $(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)(x^0 + x^2 + x^4 + \cdots)(x^0 + x^3 + x^6 + \cdots)$
  $(x^0 + x^4 + x^8 + \cdots)$.
  3. Solução: coeficiente de x^r.

Exemplo

- **Função geradora para o problema de encontrar o número de distribuições de 10 bolas idênticas em 3 caixas distintas, com um número par de bolas em cada caixa:**
  1. **Reformulação do problema: encontrar o número de soluções inteiras para:**
  $$x_1 + x_2 + x_3 = r, \text{ com } x_i \in \{0, 2, 4, \ldots\}.$$
  2. **A função geradora é, portanto:**
  $$(x^0 + x^2 + x^4 + \cdots)^3.$$
  3. **Solução: coeficiente de x^{10}.**

Exemplo

- **Função geradora para o problema dos dados de Galileu:**
  1. **Reformulação do problema: encontrar o número de soluções inteiras para:**
  $$x_1 + x_2 + x_3 = r, \text{ com } 1 \leq x_i \leq 6.$$
  2. **A função geradora é, portanto:**
  $$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3.$$
  3. **Solução: coeficiente de x^{10}.**

Exemplo

- **Função geradora para o problema de encontrar o número de soluções inteiras de:**
  $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq r, \text{ com } 1 \leq x_i \leq 3:$$
  1. **Reformulação do problema: encontrar o número de soluções inteiras para:**
  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = r,$
  com $1 \leq x_i \leq 3,$ **para** $1 \leq i \leq n,$ **e** $x_{n+1} \geq 0.$
  2. **A função geradora é, portanto:**
  $$(x^1 + x^2 + x^3)^n (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots).$$
  3. **Solução: coeficiente de x^r.**

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES DE FUNÇÕES GERADORAS ORDINÁRIAS SIMPLES

Identidades úteis para a extração de coeficientes

(a) $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$
$= C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)x + \cdots + C(n-1+r,r)x^r + \cdots$

Prova: $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ é a função geradora para o número de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \text{ com } x_i \geq 0.$$

Identidades úteis para a extração de coeficientes

(b) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + \cdots)^n$

Prova: $1 + x + \cdots + x^{m-1} = (1 - x^m)(1 + x + x^2 + \cdots)$

Identidades úteis para a extração de coeficientes

(c) $(1 - x^m)^n$
$= C(n,0) - C(n,1)x^m + C(n,2)x^{2m} + \cdots + (-1)^n C(n,n)x^{nm}$

Prova: No Teorema Binomial, substitua x por $-x^m$.

Identidades úteis para a extração de coeficientes

(d) $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Prova: $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$.

Definições e identidades importantes

(1) O coeficiente de x^r em

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0$

(2) (Teorema Binomial)

$$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n$$

(3) $(1 + x + x^2 + \cdots)^n =$
$C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)x + \cdots + C(n-1+r,r)x^r + \cdots$

Definições e identidades importantes

(4) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1 + x + x^2 + \cdots)^n$

(5) $(1-x^m)^n =$
$C(n,0) - C(n,1)x^m + C(n,2)x^{2m} + \cdots + (-1)^nC(n,n)x^{nm}$

(6) $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES: Exemplo

- Coeficiente de x^{20} na função geradora $(x^3 + x^4 + \cdots)^3$:

$$\begin{aligned}(x^3 + x^4 + \cdots)^3 &= [x^3(1 + x + x^2 + \cdots)]^3\\ &= x^9(1 + x + x^2 + \cdots)^3\\ &= x^9[C(3-1+0,0) + C(3-1+1,1)x + \cdots], \text{ por } \mathbf{(3)}\end{aligned}$$

Logo, o coeficiente de x^{20} é $C(3-1+11,11)$.

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES: Exemplo

- Coeficiente de x^9 em $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$:

$$\begin{aligned}(1 + x + \cdots + x^5)^4 &= (1-x^6)^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4, \text{ por } \mathbf{(4)}\\ &= (C(4,0) - C(4,1)x^6 + \cdots + C(4,4)x^{24})\\ &\quad (C(4-1+0,0) + C(4-1+1,1)x + \cdots), \text{ por } \mathbf{(5)} \text{ e } \mathbf{(3)}\end{aligned}$$

Logo, o coeficiente de x^9 é

$$C(4,0)C(4-1+9,9) - C(4,1)C(4-1+3,3).$$

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES

Os resultados a seguir são úteis para:

- Construir uma função geradora para um a_n específico.
- Utilizar função geradora para resolver somatórias.

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES

Sejam $g(x)$ a função geradora para a_n, e $h(x)$ a função geradora para b_n. Então:

(a) $g(x)/(1-x)$ é a função geradora para $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Prova:

$$\begin{aligned} g(x)/(1-x) & \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)/(1-x) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots), \text{ por } \mathbf{(6)} \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

EXTRAÇÃO DE COEFICICIENTES

(b) $C_1g(x) + C_2h(x)$ é a função geradora para $C_1a_n + C_2b_n$, onde C_1 e C_2 são constantes.

Prova:

$$\begin{aligned} C_1g(x) + C_2h(x) & \\ &= C_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + C_2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &= (C_1a_0 + C_2b_0) + (C_1a_1 + C_2b_1)x + \cdots + (C_1a_n + C_2b_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES

(c) $(1-x)g(x)$ é a função geradora para $a_n - a_{n-1}$.

Prova:

$$\begin{aligned} (1-x)g(x) & \\ &= (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) - (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})x^n + \cdots \end{aligned}$$

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES

(d) $xg'(x)$ é a função geradora para na_n.

Prova:

$$xg'(x) = x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + na_nx^n + \cdots$$

EXTRAÇÃO DE COEFICIENTES

(e) $h(x)g(x)$ é a função geradora para $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$.

Prova: segue de **(1)**.

Exemplo

- Função geradora para $a_n = 2n + 3$:

  Função geradora para 1: $1/(1-x)$, por **(6)**.
  Logo, a função geradora para n é: $x[1/(1-x)]' = x/(1-x)^2$, por **(d)**.
  Assim, a função geradora para $2n+3$ é: $2x/(1-x)^2 + 3/(1-x)$.

Exemplo

- Função geradora para $a_n = n^2$:

  Função geradora para n: $x/(1-x)^2$, pelo exemplo acima.
  Função geradora para n^2: $x[x/(1-x)^2]' = (x+x^2)/(1-x)^3$, por **(d)**.

Exemplo

- Avaliação de $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$:

  Função geradora para n^2: $(x + x^2)/(1 - x)^3$, pelo exemplo acima.
  Função geradora para $\sum_{k=1}^{n} k^2$: $(x + x^2)/(1 - x)^4$, por (a).
  $(x + x^2)/(1 - x)^4$
  $= (x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots)^4$, por (6)
  $= (x + x^2)(1 + C(4 - 1 + 1, 1)x + C(4 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots)$, por (3)
  Coeficiente de x^n:
  $C(4 - 1 + (n - 1), (n - 1)) + C(4 - 1 + (n - 2), (n - 2))$.
  Portanto,
  $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Exemplo

- Avaliação de $\sum_{k=0}^{n} k2^k$:

  Função geradora para 2^n: $1/(1 - 2x)$, por (6), $x/2x$.
  Função geradora para $n2^n$: $x[1/(1 - 2x)]' = 2x/(1 - 2x)^2$, por (d).
  Função geradora para $\sum_{k=0}^{n} k2^k$: $2x/(1 - 2x)^2(1 - x)$, por (a).
  $2x/(1 - 2x)^2(1 - x)$
  $= 2/(1 - x) - 4/(1 - 2x) + 2/(1 - 2x)^2$, pelo método das frações parciais

Exemplo

- Avaliação de $\sum_{k=0}^{n} k2^k$:

  Como
  $-2/(1 - x) = 2(1 + x + x^2 + \cdots)$, por (6)
  $-4/(1 - 2x) = 4(1 + 2x + 4x^2 + \cdots + (2x)^n + \cdots)$, por (6)
  $-2/(1 - 2x)^2 =$
  $2(1 + C(2 - 1 + 1, 1)2x + \cdots + C(2 - 1 + n, n)(2x)^n + \cdots)$, por (6) e (3)
  o coeficiente de x^n é:
  $$2 - 4 \times 2^n + 2C(2 - 1 + n, n) \times 2^n.$$
  Portanto,
  $$\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2 + (2n - 2)2^n.$$

EXEMPLOS DE USO DE FUNÇÕES GERADORAS

Exemplo de uso de Funções Geradoras Ordinárias

- O problema dos dados de Galileu:

  Soma 10: coeficiente de x^{10} na função geradora
  $$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3.$$

  $$\begin{aligned}(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 \\ &= x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 \\ &= x^3(1 - x^6)^3(1 + x + x^2 + \cdots)^3, \text{ por } \mathbf{(4)} \\ &= x^3(C(3,0) - C(3,1)x^6 + C(3,2)x^{12} - C(3,3)x^{18}) \\ &\quad (C(3-1+0,0) + C(3-1+1,1)x + \cdots), \text{ por } \mathbf{(5)} \text{ e } \mathbf{(3)}\end{aligned}$$

  O coeficiente de x^{10} é, portanto,
  $$C(3,0)C(3-1+7,7) - C(3,1)C(3-1+1,1) = 36 - 9 = 27.$$

Exemplo

- Número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com, no máximo, 3 bolas em cada caixa:

  Reformulação: número de soluções inteiras para
  $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \text{ com } 0 \leq x_i \leq 3$$

  Função geradora:
  $$(1 + x + x^2 + x^3)^n$$

  $$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3)^n \\ &= (1 - x^4)^n(1 + x + x^2 + \cdots)^n, \text{ por } \mathbf{(4)} \\ &= (C(n,0) - C(n,1)x^4 + \cdots + (-1)^n C(n,n)x^{4n}) \\ &\quad (C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)x + \cdots), \text{ por } \mathbf{(5)} \text{ e } \mathbf{(3)}\end{aligned}$$

  O coeficiente de x^r é, portanto,
  $$C(n,0)C(n-1+r,r) - C(n,1)C(n-1+r-4,r-4) + \cdots.$$

Exemplo de uso de funcão geradora para mostrar identidade combinatória

- $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = ?$

  Lembrando que:
  $$h(x)g(x) \text{ é a função geradora para } a_0 b_n + \cdots + a_n b_0,$$

  o coeficiente de x^n em $(1+x)^n(1+x)^n$ é:
  $$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)C(n,n-k) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2.$$

  Mas, pelo Teorema Binomial, o coeficiente de x^n em $(1+x)^{2n}$ é: $C(2n,n)$.

  Logo,
  $$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n).$$

FIM