

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 4

Newton José Vieira
UFMG

30 de outubro de 2007

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

SUMÁRIO

- Relações de Recorrência
- RR's Lineares com Coeficientes Constantes: Definições
- RR's Lineares com Coeficientes Constantes: Solução
- Outras Técnicas para Resolução de RRs
- Relações Tipo Divisão e Conquista

Relações de Recorrência

- **Definição:**
Uma relação de recorrência (RR) é uma fórmula que consta de duas partes:
 - um conjunto de condições iniciais (condições de contorno); e
 - uma parte recorrente.(Uma RR é um esquema recursivo para computar uma sequência de números.)
- **Exemplo:**
RR que define a sequência de Fibonacci:
 - $a_1 = 1, a_2 = 1;$
 - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3.$

Relações de Recorrência

- Solução de uma relação de recorrência:

Uma fórmula fechada para a função definida pela RR.

- Exemplo:

Solução para a RR que define a sequência de Fibonacci:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Três algoritmos para calcular a_n (da sequência de Fibonacci)

- Baseado na RR, iterativo \implies linear.
- Baseado na RR, recursivo \implies exponencial.
- Baseado na solução da RR \implies constante (erro de arredondamento).

Exemplo de RR

- Algoritmo de pesquisa binária (por x) em lista ordenada:

se a lista tem apenas 1 elemento então
compare x com o elemento da lista;
retorne a resposta apropriada;

senão

seja m o elemento do meio da lista;

se $x < m$ então

chame o algoritmo recursivamente na 1^a metade;

senão

chame o algoritmo recursivamente na 2^a metade;

fim

fim

Número de comparações: ???

Exemplo de RR

- Algoritmo de pesquisa binária (por x) em lista ordenada:

se a lista tem apenas 1 elemento então
compare x com o elemento da lista;
retorne a resposta apropriada;

senão

seja m o elemento do meio da lista;

se $x < m$ então

chame o algoritmo recursivamente na 1^a metade;

senão

chame o algoritmo recursivamente na 2^a metade;

fim

fim

Número de comparações: $a_1 = 1; a_n = a_{n/2} + 1$ para $n \geq 2$.

Exemplo de RR

- RR para o número de seqüências binárias de n dígitos sem 1's consecutivos:

$n:$	0	1	2	3	4
	0	00	000	0000	
		1	10	100	1000
			01	010	0100
				001	0010
				101	1010
					0001
					1001
					0101
$a_n:$	1	2	3	5	8

RR: ???

Exemplo de RR

- RR para o número de seqüências binárias de n dígitos sem 1's consecutivos:

$n:$	0	1	2	3	4
	0	00	000	0000	
		1	10	100	1000
			01	010	0100
				001	0010
				101	1010
					0001
					1001
					0101
$a_n:$	1	2	3	5	8

RR: $a_0 = 1, a_1 = 2; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Exemplo de RR

- RR para o número de regiões em que o plano é dividido por n retas, se há interseção entre cada par de retas, mas não há interseção de mais de 2 retas em um único ponto:

$n:$	0	1	2	3
	①	① ②	① ② ④ ③	
$a_n:$	1	2	4	7

RR: ???

Exemplo de RR

- RR para o número de regiões em que o plano é dividido por n retas, se há interseção entre cada par de retas, mas não há interseção de mais de 2 retas em um único ponto:

$n:$	0	1	2	3
	①	① ②	① ② ④ ③	
$a_n:$	1	2	4	7

RR: $a_0 = 1; a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$.

Exemplo de RR

- Um experimento é executado lançando-se um dado até que apareçam 2 números pares. Determine uma RR para o número de experimentos que terminam no n -ésimo lançamento, ou antes.

RR: ???

Exemplo de RR

- Um experimento é executado lançando-se um dado até que apareçam 2 números pares. Determine uma RR para o número de experimentos que terminam no n -ésimo lançamento, ou antes.

a_{n-1} : número de experimentos que terminam antes do n -ésimo lançamento;

$n - 1$: número de escolhas para o lançamento que deu número par antes do n -ésimo lançamento;

3: número de escolhas para tal número par;

3^{n-2} : número de escolhas para os números ímpares;

3: número de escolhas para o número par do n -ésimo lançamento.

RR: $a_0 = 0, a_1 = 0; a_n = a_{n-1} + (n - 1) \times 3^n$ para $n \geq 2$.

Exemplo de RR

- RR para o número de maneiras de “completar com parênteses” (em inglês, *fully parenthesize*) uma expressão

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

n :	0	1	2	3	4
	w_1	$(w_1 + w_3)$	$((w_1 + w_2) + w_3)$	$((w_1 + w_2) + w_3) + w_4$	$((w_1 + (w_2 + w_3)) + w_4)$
			$(w_1 + (w_2 + w_3))$	$((w_1 + w_2) + (w_3 + w_4))$	$(w_1 + (w_2 + (w_3 + w_4)))$
				$(w_1 + ((w_2 + w_3) + w_4))$	
a_n :	0	1	1	2	5

Exemplo (continuação)

Para colocar parêntesis em $w_1 + w_2 + \dots + w_n$, para $n \geq 2$, fazer para r de 1 a $n - 1$:

- colocar parêntesis em $w_1 + \dots + w_r$, obtendo E_1 ;
- colocar parêntesis em $w_{r+1} + \dots + w_n$, obtendo E_2 ;
- obter $(E_1 + E_2)$.

RR: $a_0 = 0, a_1 = 1; a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ para $n \geq 2$.

Exemplo de RR

• O problema das permutações caóticas.

- $D_0 = 1, D_1 = 0.$
- Para $n \geq 2$, x_n pode ficar nas posições 1 a $n - 1$.

Suponha x_n na posição i :

caso 1: x_i na posição n : D_{n-2} permutações para os elementos restantes.

caso 2: x_i fora da posição n : D_{n-1} permutações (é como se x_n fosse retirado).

Logo, $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ para $n \geq 2$.

Exemplo (continuação)

Simplificando:

- $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ pode ser re-escrita assim:

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}).$$

- Fazendo-se $a_n = D_n - nD_{n-1}$, tem-se:

$$a_1 = -1, a_n = -a_{n-1} \text{ para } n \geq 2,$$

ou ainda,

$$a_n = (-1)^n.$$

- Logo,

$$D_0 = 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \text{ para } n \geq 1.$$

Exemplos de RRs com mais de uma variável

• RR para combinações:

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1, C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r).$$

• RR para arranjos:

$$P(n, 0) = 1, P(n, n) = n!, P(n, r) = rP(n - 1, r - 1) + P(n - 1, r).$$

Exemplo de RRs simultâneas

• RR's para o número de sequências binárias de n dígitos com:

- número par de 0's e número par de 1's (a_n);
- número par de 0's e número ímpar de 1's (b_n);
- número ímpar de 0's e número par de 1's (c_n); e
- número ímpar de 0's e número ímpar de 1's (d_n).

Sistema simultâneo de RR's:

- $a_0 = 1, b_0 = c_0 = d_0 = 0;$
- $a_n = b_{n-1} + c_{n-1},$
 $b_n = a_{n-1} + d_{n-1},$
 $c_n = a_{n-1} + d_{n-1},$
 $d_n = b_{n-1} + c_{n-1},$ para $n \geq 1.$

RRs e somatórias

RR's podem descrever somatórias. Exemplos:

- $1 + 2 + \dots + n$:

$$a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + n \text{ para } n \geq 2.$$

- $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$:

$$a_0 = 1; a_n = a_{n-1} + 2^n \text{ para } n \geq 1.$$

RR'S LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: DEFINIÇÕES

Definições

Uma RR linear de ordem r (de uma variável) tem uma parte recorrente da forma:

$$a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \dots + h_r(n)a_{n-r} = f(n).$$

Definições

Observações:

- se $f \equiv 0$ a RR é homogênea.
- se $f \not\equiv 0$ a RR é não-homogênea; neste caso:
 - a parte homogênea da RR é:

$$a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \dots + h_r(n)a_{n-r} = 0;$$
 - a parte não-homogênea da RR é f .
- se as funções h_i são constantes diz-se que a RR tem coeficientes constantes.

Exemplo

- $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$.

RR linear homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes.

Exemplo

- $w_1 = w_2 = 0$, $w_n = w_{n-1} + w_{n-2} + 1$ para $n \geq 3$.

RR linear não-homogênea de ordem 2, com coeficientes constantes.

- parte homogênea: $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$.
- parte não-homogênea: $f(n) = 1$.

Exemplo

- $a_1 = 0$, $a_n = a_{n/2} + 1$ para $n = 2^k$ ($k \geq 1$).

RR não linear.

Exemplo

- $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ para $n \geq 2$.

RR não linear.

Exemplo

- $D_0 = 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ para $n \geq 1$.

RR linear não-homogênea de ordem 1, com coeficientes não constantes.

Exemplo

- $C(n, 0) = C(n, n) = 1, C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$.

Não é RR de uma variável.

RR bem definida

Uma RR linear de ordem r bem definida consiste de:

- parte recorrente; e
- r condições iniciais, para r valores consecutivos.

RR'S LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: SOLUÇÃO

- Técnicas similares às de resolução de equações diferenciais ordinárias.

Um exemplo

Seja uma RR linear de ordem r com coeficientes constantes. Exemplo: $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ ($n \geq 2$).

Estratégia:

1. Encontrar uma solução geral para a parte recorrente, com r constantes arbitrárias C_1, C_2, \dots, C_r .

Exemplo: $C_1 2^n + C_2 3^n$

Continuação do exemplo

2. Resolver um sistema de r equações simultâneas — uma equação para cada condição inicial — com r incógnitas — os C_i 's.

Exemplo: $C_1 2^0 + C_2 3^0 = a_0 = 2$
 $C_1 2^1 + C_2 3^1 = a_1 = 5$

Solução do sistema: $C_1 = 1, C_2 = 1$.

Solução da RR: $2^n + 3^n$.

Princípio da Superposição

Se $g_1(n)$ é solução de

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = f_1(n)$$

e $g_2(n)$ é solução de

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = f_2(n),$$

então $C_1 g_1(n) + C_2 g_2(n)$ é solução de

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = C_1 f_1(n) + C_2 f_2(n),$$

para quaisquer constantes C_1 e C_2 .

Corolário do Princípio da Superposição

Se $g_1(n), g_2(n), \dots, g_r(n)$ são soluções de

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = 0,$$

então $C_1 g_1(n) + C_2 g_2(n) + \dots + C_r g_r(n)$ também é para quaisquer constantes C_1, C_2, \dots, C_r .

⇒ Como encontrar r g_i 's?

- Procurar soluções da forma α^n , para algum número α .

Dois exemplos

- $a_n = 3a_{n-1}$ tem a solução geral $C_1 3^n$.
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

Seja a função geradora $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- Multiplicando ambos os lados da parte recorrente por x^n :

$$a_n x^n - 5a_{n-1} x^n + 6a_{n-2} x^n = 0 \quad (n \geq 2).$$

- Somando ambos os lados a partir de $n = 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0.$$

Continuação do exemplo

– Mas,

$$* \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = g(x) - a_1 x - a_0,$$

$$* \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = x(g(x) - a_0), \text{ e}$$

$$* \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = x^2 g(x).$$

– Assim, $g(x) - a_1 x - a_0 - 5xg(x) + 5a_0 x + 6x^2 g(x) = 0$ ou seja,

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x - 5a_0 x}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{2 - 5x}{(3x - 1)(2x - 1)}$$

ou ainda,

$$g(x) = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{(1 - 3x)}.$$

– Lembrando que $1/(1 - z) = 1 + z + z^2 + \dots$, conclui-se que

$$a_n = 2^n + 3^n.$$

Conclusão do exemplo

Em geral, soluções da forma α^n são produzidas porque a decomposição em frações parciais contém termos da forma

$$\frac{C}{1 - \alpha x} = C(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots).$$

Se α^n é solução para a parte recorrente, então:

$$\alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \dots + c_r \alpha^{n-r} = 0.$$

Dividindo por α^{n-r} , tem-se a equação característica da RR:

$$\alpha^r + c_1 \alpha^{r-1} + \dots + c_r = 0.$$

Se a equação característica tem r raízes diferentes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, então tem-se r soluções $\alpha_1^n, \dots, \alpha_r^n$. Pelo princípio da superposição,

$$C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_r \alpha_r^n$$

é também uma solução para a parte recorrente.

Exemplo

- $a_0 = 3, a_1 = -3, a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

– equação característica: $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$;

– raízes: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$;

– solução geral: $C_1 1^n + C_2 (-2)^n$;

– para satisfazer as condições iniciais, deve-se ter:

$$C_1 1^0 + C_2 (-2)^0 = a_0 = 3$$

$$C_1 1^1 + C_2 (-2)^1 = a_1 = -3$$

o que dá: $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$.

– solução da RR: $a_n = 1 + 2(-2)^n$

Exemplo

- $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n + a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

– equação característica: $\alpha^2 + 1 = 0$;

– raízes: $\alpha_1 = i, \alpha_2 = -i$;

– solução geral: $C_1 i^n + C_2 (-i)^n$;

– para satisfazer as condições iniciais, deve-se ter:

$$C_1 i^1 + C_2 (-i)^1 = a_1 = 0$$

$$C_1 i^2 + C_2 (-i)^2 = a_2 = 1$$

o que dá: $C_1 = -1/2$ e $C_2 = -1/2$.

– solução da RR: $a_n = -[i^n/2 + (-i)^n/2]$

Exemplo

- $a_1 = 10, a_2 = 18, a_3 = 70, a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} + 12a_{n-3} = 0$ para $n \geq 4$.

– equação característica: $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha + 12 = 0$;

– raízes: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 3$;

– solução geral: $C_1 2^n + C_2 (-2)^n + C_3 3^n$;

– para satisfazer as condições iniciais, deve-se ter:

$$C_1 2^1 + C_2 (-2)^1 + C_3 3^1 = a_1 = 10$$

$$C_1 2^2 + C_2 (-2)^2 + C_3 3^2 = a_2 = 18$$

$$C_1 2^3 + C_2 (-2)^3 + C_3 3^3 = a_3 = 70$$

ou seja: $C_1 = 1, C_2 = -1$ e $C_3 = 2$.

– solução da RR: $a_n = 2^n - (-2)^n + 2(3^n)$

Equação característica com raízes idênticas

Se a equação característica tem uma raiz α_i de multiplicidade m , então ela contribue com m soluções:

$$\alpha_i^n, n\alpha_i^n, n^2\alpha_i^n, \dots, n^{m-1}\alpha_i^n.$$

Exemplo

- $a_1 = 3, a_2 = 11, a_3 = 29, a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ para $n \geq 4$.
 - equação característica: $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 16\alpha - 12 = 0$;
 - raízes: $\alpha_1 = 2$, de multiplicidade 2, e $\alpha_2 = 3$;
 - solução geral: $C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 3^n$;
 - para satisfazer as condições iniciais, deve-se ter: $C_1 = 1, C_2 = 2$ e $C_3 = -1$.
 - solução da RR: $a_n = 2^n + n 2^{n+1} - 3^n$

RRs lineares Não-homogêneas com coeficientes constantes

Pelo princípio da superposição, se $g(n)$ é a solução geral para a parte homogênea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = 0,$$

e se $p(n)$ é alguma solução da parte recorrente

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = f(n),$$

então $g(n) + p(n)$ também é solução da parte recorrente. Como $g(n) + p(n)$ tem r constantes, é a solução geral da parte recorrente.

⇒ Não existe um método geral para determinar $p(n)$.

RRs lineares Não-homogêneas com coeficientes constantes

Caso 1: $f(n)$ é polinômio

$p(n)$ é um polinômio cuja ordem é a ordem de $f(n)$ somada com a multiplicidade de 1 na equação característica.

Exemplo

- $a_1 = -4, a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$ para $n \geq 2$.

– solução geral da parte homogênea $a_n + 3a_{n-1} = 0$:

$$g(n) = C_1(-3)^n.$$

– $p(n)$ é polinômio de ordem 2, $An^2 + Bn + C$:

$$* [An^2 + Bn + C] + 3[A(n-1)^2 + B(n-1) + C] = 4n^2 - 2n;$$

* desenvolvendo, tem-se:

$$4A = 4$$

$$4B - 6A = -2$$

$$3A - 3B + 4C = 0$$

cuja solução é: $A = 1, B = 1, C = 0$;

* portanto, tem-se:

$$p(n) = n^2 + n.$$

Exemplo (continuação)

– solução geral da parte recorrente:

$$g(n) + p(n) = C_1(-3)^n + n^2 + n.$$

– para satisfazer a condição inicial, deve-se ter:

$$C_1(-3)^1 + 1^2 + 1 = a_1 = -4$$

o que dá: $C_1 = 2$.

– solução da RR: $a_n = 2(-3)^n + n^2 + n$

Exemplo

• $w_1 = 0, w_2 = 0, w_n = w_{n-1} + w_{n-2} + 1$ para $n \geq 3$.

– solução geral da parte homogênea $w_n - w_{n-1} - w_{n-2} = 0$:

$$g(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

– $p(n)$ é polinômio de ordem 0, A :

* $A - A - A = 1$; ou seja, $A = -1$;

* portanto, tem-se:

$$p(n) = -1.$$

– solução geral da parte recorrente:

$$g(n) + p(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1.$$

Exemplo (continuação)

– para satisfazer as condições iniciais, deve-se ter:

$$C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 - 1 = a_1 = 0$$

$$C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1 = a_2 = 0$$

o que dá: $C_1 = 1/\sqrt{5}, C_2 = -1/\sqrt{5}$.

– solução da RR: $w_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1$

Exemplo

• $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$.

– solução geral da parte homogênea $a_n - a_{n-1} = 0$:

$$g(n) = C_1(1)^n = C_1.$$

– $p(n)$ é polinômio de ordem 2, $An^2 + Bn + C$:

* $[An^2 + Bn + C] - [A(n-1)^2 + B(n-1) + C] = n$;

* desenvolvendo, tem-se:

$$2A = 1$$

$$-A + B = 0$$

cuja solução é: $A = 1/2, B = 1/2$;

* portanto, tem-se:

$$p(n) = n^2/2 + n/2.$$

Exemplo (continuação)

– solução geral da parte recorrente:

$$g(n) + p(n) = C_1 + n^2/2 + n/2.$$

– para satisfazer a condição inicial, deve-se ter:

$$C_1 + 0^2/2 + 0/2 = a_0 = 1$$

o que dá: $C_1 = 1$.

– solução da RR: $a_n = n^2/2 + n/2 + 1$

RRs lineares Não-homogêneas com coeficientes constantes

Caso 2: $f(n)$ é da forma α^n

$p(n)$ é $An^k\alpha^n$, para algum A , onde k é a multiplicidade de α na equação característica.

Exemplo

• Solução geral para $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$.

– solução geral da parte homogênea $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$:

$$g(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

– $p(n)$ é da forma $An^2 2^n$:

$$* An^2 2^n - 4A(n-1)^2 2^{n-1} + 4A(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n;$$

* desenvolvendo, tem-se: $A = 1/2$;

* portanto, tem-se:

$$p(n) = (1/2)n^2 2^n.$$

– solução geral da parte recorrente:

$$g(n) + p(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + n^2 2^{n-1}.$$

RRs lineares Não-homogêneas com coeficientes constantes

O princípio da superposição pode ser usado para combinar os casos.

Combinação de casos: Exemplo

- Solução geral para $a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n + 2^n$.

– solução geral da parte homogênea $a_n + 3a_{n-1} = 0$:

$$g(n) = C_1(-3)^n.$$

– $p_1(n)$ para $a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$ é:

$$p_1(n) = n^2 + n.$$

– $p_2(n)$ para $a_n + 3a_{n-1} = 2^n$ é:

$$p_2(n) = (2/5)2^n.$$

– pelo princípio da superposição, $p(n)$ para $a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n + 2^n$ é:

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) = n^2 + n + (2/5)2^n.$$

– solução geral da parte recorrente:

$$g(n) + p(n) = C_1(-3)^n + n^2 + n + (2/5)2^n.$$

OUTRAS TÉCNICAS PARA RESOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Relação de recorrência linear de primeira ordem

$$a_0 = c, a_n = p(n)a_{n-1} + f(n).$$

Caso particular: $p(n) = 1$

Neste caso,

$$a_n = c + \sum_{k=1}^n f(k).$$

Basta usar a fórmula fechada para a somatória.

Exemplo:

- $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$.

Evidentemente,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n k = 1 + n(n+1)/2.$$

Relação de recorrência linear de primeira ordem

$$a_0 = c, a_n = p(n)a_{n-1} + f(n).$$

Caso geral: $p(n)$ qualquer

- Solução u_n para a parte homogênea $a_n = p(n)a_{n-1}$, supondo $u_0 = 1$:

$$u_n = p(n)a_{n-1} = \cdots = p(n)p(n-1)\cdots p(1).$$

- A solução da RR será da forma $[u_nv_n]$. Logo, deve-se ter:

$$v_0 = a_0, \text{ e } (u_nv_n) = p(n)(u_{n-1}v_{n-1}) + f(n).$$

Como $u_n = p(n)u_{n-1}$, a parte recorrente torna-se:

$$u_nv_n = u_nv_{n-1} + f(n).$$

Caso geral (continuação)

• Logo, basta fazer o seguinte:

- obter u_n ;
- obter v_n , resolvendo

$$v_0 = a_0, v_n = v_{n-1} + f(n)/u_n \text{ para } n \geq 1; \text{ e}$$

- multiplicar u_n e v_n .

Exemplo

- $a_1 = 1, a_n - \frac{n}{n-1}a_{n-1} = n^3$ para $n \geq 2$.

- $u_n = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} 1 = n$.

- $v_1 = a_1 = 1, v_n = v_{n-1} + n^3/u_n$ para $n \geq 2$, ou ainda:

$$v_1 = 1, v_n = v_{n-1} + n^2 \text{ para } n \geq 2,$$

cuja solução é:

$$v_n = \sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

– A solução é, portanto:

$$a_n = u_n v_n = n^2(n+1)(2n+1)/6.$$

Exemplo

- $D_0 = 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ para $n \geq 1$.

- $u_n = n!$.

- $v_0 = D_0 = 1, v_n = v_{n-1} + (-1)^n/u_n$ para $n \geq 1$, ou ainda:

$$v_0 = 1, v_n = v_{n-1} + (-1)^n/n! \text{ para } n \geq 1,$$

cuja solução é:

$$v_n = 1/2! - 1/3! + \cdots + (-1)^n/n!.$$

– A solução é, portanto:

$$D_n = u_n v_n = n!(1/2! - 1/3! + \cdots + (-1)^n/n!).$$

RELAÇÕES TIPO DIVISÃO E CONQUISTA

Pesquisa binária

Restrição: $n = 2^k$ para algum $k \geq 0$.

Número de comparações: $a_1 = 1; a_n = a_{n/2} + 1$ para $n \geq 2$.

Fazendo substituições sucessivas:

$$\begin{aligned}
 a_{2^k} &= a_{2^{k-1}} + 1 \\
 &= (a_{2^{k-2}} + 1) + 1 = a_{2^{k-2}} + 2 \\
 &= (a_{2^{k-3}} + 1) + 2 = a_{2^{k-3}} + 3 \\
 &\vdots \\
 &= (a_{2^{k-k}} + 1) + (k - 1) = a_{2^{k-k}} + k \\
 &= a_{2^0} + k \\
 &= a_1 + k \\
 &= 1 + k.
 \end{aligned}$$

Como $n = 2^k$, $k = \log_2(n)$ **e, portanto,** $a_n = \log_2(n) + 1$.

Um algoritmo de ordenação

Comparações: $a_1 = 0; a_n = 2a_{n/2} + n - 1$ para $n \geq 2$.

Fazendo substituições sucessivas:

$$\begin{aligned}
 a_{2^k} &= 2a_{2^{k-1}} + 2^k - 1 \\
 &= 2(2a_{2^{k-2}} + 2^{k-1} - 1) + 2^k - 1 = 4a_{2^{k-2}} + 2 \cdot 2^k - (1 + 2) \\
 &= 8a_{2^{k-3}} + 3 \cdot 2^k - (1 + 2 + 4) \\
 &\vdots \\
 &= 2^k a_{2^{k-k}} + k \cdot 2^k - (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}) \\
 &= 2^k a_1 + k \cdot 2^k - (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}) \\
 &= k \cdot 2^k - (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}) \\
 &= k \cdot 2^k - 2^k + 1.
 \end{aligned}$$

Como $n = 2^k$, $k = \log_2(n)$ **e, portanto,** $a_n = n \log_2(n) - n + 1$.

FIM