PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO
BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 5

Newton José Vieira

UFMG

19 de novembro de 2007

SUMÁRIO

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Princípio da inclusão e exclusão para 2 conjuntos

- Notação:

  $N(A)$: número de elementos do conjunto A.
- Princípio da inclusão e exclusão:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Um exemplo

- Número de maneiras de selecionar um ás ou uma carta vermelha de um baralho convencional:
  - Sendo
    - A: conjunto dos ases;
    - V: conjunto das cartas vermelhas;

    a solução é $N(A \cup V)$.
  - Pelo princípio da inclusão e exclusão, tem-se:

$$\begin{aligned} N(A \cup V) &= N(A) + N(V) - N(A \cap V) \\ &= 4 + 26 - 2 = 28. \end{aligned}$$

Princípio da inclusão e exclusão para 3 conjuntos

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) = {} & N(A) + N(B) + N(C) \\ & - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) \\ & + N(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

- Uma identidade importante:

$$N(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) = N(U) - N(A_1 \cup \cdots \cup A_n).$$

U é o conjunto universo.

Um exemplo

- Número de sequências ternárias de n dígitos com no mínimo um 0, um 1 e um 2:
  - Sendo (para $i = 0, 1, 2$)
    - S_i: conjunto das sequências sem o dígito i;

    a solução é $N(\overline{S_0} \cap \overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = N(U) - N(S_0 \cup S_1 \cup S_2)$.
  - Como

$$\begin{aligned} & N(U) = 3^n, \\ & N(S_i) = 2^n \text{ para } i = 0, 1, 2, \\ & N(S_i \cap S_j) = 1 \text{ para } i \neq j, \\ & N(S_0 \cap S_1 \cap S_2) = 0, \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} N(U) - N(S_0 \cup S_1 \cup S_2) &= 3^n - (3.2^n - 3.1 + 0) \\ &= 3^n - 3.2^n + 3. \end{aligned}$$

Notação

Sejam:

$$\begin{aligned} S_1 &= \Sigma_{i=1}^{n} N(A_i) \\ S_2 &= \Sigma_{i \neq j} N(A_i \cap A_j) \\ &\vdots \\ S_k &= \Sigma_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ &\vdots \\ S_n &= N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_k \text{ tem } C(n,k) \text{ termos}}$$

Princípio da inclusão e exclusão/geral

Princípio da inclusão e exclusão:

$$N(\cup_{i=1}^{n} A_i) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{i+1} S_i + \cdots + (-1)^{n+1} S_n$$

Prova:

Se um elemento ocorre em exatamente r dos A_i's, então ele é contado $C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$ vezes. Isto é o mesmo que $1 - \Sigma_{k=0}^{r} C(r,k)(-1)^k$. Pelo Teorema Binomial, isto dá $1 - (1-1)^r = 1$.

ALGUNS EXEMPLOS DE USO DO PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Exemplo de Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão

- Número de mãos de 13 cartas que não contêm nenhuma carta de algum naipe:
  - Sendo
    - A_o: conjunto das mãos sem ouros;
    - A_c: conjunto das mãos sem copas;
    - A_e: conjunto das mãos sem espadas;
    - A_p: conjunto das mãos sem paus;

    a solução é $N(A_o \cup A_c \cup A_e \cup A_p)$.

Exemplo (continuação)

– Pelo princípio da inclusão e exclusão, tem-se:

$$N(A_o \cup A_c \cup A_e \cup A_p) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Como

$$\begin{aligned} S_1 &= C(4,1)C(39,13), \\ S_2 &= C(4,2)C(26,13), \\ S_3 &= C(4,3)C(13,13), \\ S_4 &= C(4,4)0, \end{aligned}$$

tem-se:

$$N(A_o \cup A_c \cup A_e \cup A_p) = 4C(39,13) - 6C(26,13) + 4.$$

Exemplo de Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão

- Número de arranjos dos dígitos 0 a 9 que contêm pelo menos uma das sequências 289, 234 ou 487:
  - Sendo
    - A_{289}: conjunto dos arranjos com 289, etc.;

    a solução é $N(A_{289} \cup A_{234} \cup A_{487})$.
  - Como

$$\begin{aligned} &N(A_{289}) = N(A_{234}) = N(A_{487}) = 8!, \\ &N(A_{289} \cap A_{234}) = 0, \\ &N(A_{289} \cap A_{487}) = 0, \\ &N(A_{234} \cap A_{487}) = 6!, \\ &N(A_{289} \cap A_{234} \cap A_{487}) = 0, \end{aligned}$$

tem-se:

$$N(A_{289} \cup A_{234} \cup A_{487}) = 3.8! - 6!$$

Exemplo de Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão

- Número de distribuições de r bolas distintas em n caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia ($r \geq n$).
  - Sendo (para $i = 1, 2, \ldots, n$)
    - V_i: conjunto de distribuições com a caixa i vazia;

    a solução é $N(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \cap \cdots \cap \bar{V}_n)$, ou seja,

$$N(U) - N(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n).$$

  - Como

$$\begin{aligned} &N(U) = n^r, \\ &N(S_k) = C(n,k)(n-k)^r \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} N(U) - N(\cup_{i=1}^n V_i) &= n^r - \Sigma_{k=1}^n (-1)^{k+1} C(n,k)(n-k)^r \\ &= \Sigma_{k=0}^n (-1)^k C(n,k)(n-k)^r. \end{aligned}$$

Exemplo de Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão

- (O problema dos dados de Galileu) Número de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$: o mesmo que o número de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, com $0 \leq x_i \leq 5$.
  - Sendo
    - A_1: conjunto de soluções com $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$; (ou seja, conjunto de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, com $x_i \geq 0$)
    - A_2: conjunto de soluções com $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 0$;
    - A_3: conjunto de soluções com $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 6$;
    - U: conjunto de soluções com $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$;

    a solução é $N(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$, ou seja,

$$N(U) - N(A_1 \cup A_2 \cup A_3).$$

Exemplo (continuação)

- Como

$$\begin{aligned} &N(U) = C(3-1+7, 7), \\ &N(A_i) = C(3-1+1, 1) \text{ para } i = 1, 2, 3, \\ &N(A_1 \cap A_2) = N(A_1 \cap A_3) = N(A_2 \cap A_3) = 0, \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} N(U) - N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= C(9,7) - 3C(3,1) \\ &= 36 - 9 = 27. \end{aligned}$$

Exemplo de Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão

- (O problema das permutações caóticas) Número de permutações do conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, em que nenhum x_i fique na i-ésima posição:
  - Sendo
    - A_i: conjunto das permutações com x_i na i-ésima posição, para $i = 1, 2, \ldots, n$;
    - U: conjunto de todas as permutações;

    a solução é $N(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n)$, ou seja,

$$N(U) - N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n).$$

Permutações caóticas (continuação)

- Como

  $N(U) = n!$,

  $S_k = C(n,k)N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ para $k = 1, 2, \ldots, n$,

  e $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$

  tem-se:

$$\begin{aligned} D_n &= N(U) - N(\cup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= n! - \Sigma_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C(n,k)(n-k)! \\ &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \end{aligned}$$

Permutações caóticas (continuação)

- *Observações*:
  - $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ (convergência rápida)
    Logo, $D_n \approx e^{-1}n!$.
  - Probabilidade de se encontrar uma permutação caótica a partir da geração aleatória de uma permutação:

$$D_n/n! \approx e^{-1} \approx 0,37.$$

Permutações caóticas (continuação)

n	$e^{-1}n!$	D_n
1	0.367...	0
2	0.735...	1
3	2.207...	2
4	8.829...	9
5	44.145...	44
6	264.873...	265
7	1854.112...	1854
8	14832.899...	14833
9	133496.091...	133496
10	1334960.916...	1334961

FIM