

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 6

Newton José Vieira
UFMG
30 de julho de 2007

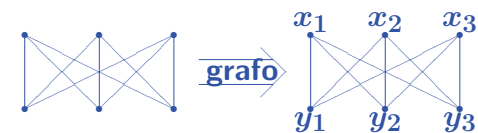
INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

SUMÁRIO

- Introdução à Teoria dos Grafos
- O Lema do Aperto de Mãos
- Isomorfismo
- Planaridade

Um exemplo

- (1) Um engenheiro eletricista necessita construir um chip no qual 3 junções devem ser ligadas a 3 outras. Pergunta: isto pode ser feito sem que as ligações se cruzem?



Mais um exemplo

(2) O problema das Sete Pontes de Königsberg:

Na cidade de Caliningrado existiam 7 pontes sobre o rio Prególia. Tais pontes ligavam 2 ilhas uma com a outra e com as margens do rio, conforme mostrado na figura abaixo. Pergunta: é possível percorrer a cidade, começando e terminando no mesmo lugar, e cruzando cada ponte exatamente uma vez?



Euler (1736): origem da teoria dos grafos.

Mais um exemplo

(3) O Sindicato dos Pescadores monitora populações de peixes no Golfo do México. Todo dia são escolhidos alguns pontos do golfo e enviadas algumas pessoas de barco para colher amostras de peixes e de correntes. Pergunta: qual é a menor rota que o barco pode tomar, de forma que passe por todos os pontos?



Grafo não direcionado

Um grafo não direcionado é uma estrutura (V, E) , em que:

- V : conjunto finito de vértices;
- E : multi-conjunto finito de arestas, sendo cada aresta um multiconjunto de 2 vértices de V .

Terminologia

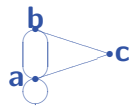
- **laço**: aresta da forma $\{v, v\}$.
- **vértices adjacentes**: vértices de uma mesma aresta.
- **aresta incidente ao vértice v** : aresta que contém v .
- **extremidade de uma aresta**: vértice da aresta.
- **grafo nulo**: aquele para o qual $V = \emptyset$.

Representação geométrica de um grafo

- **vértice:** representado por um círculo (ou ponto).
- **aresta:** representada por uma linha ligando os círculos representativos dos vértices.

Exemplo:

- $G = (V, E)$, onde:
 - $V = \{a, b, c\}$
 - $E = \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- Uma representação geométrica:



Alguns tipos de grafos

Um **grafo simples** é um grafo sem laços e sem arestas múltiplas.

Um **grafo direcionado** é um grafo cujas arestas são direcionadas (ou seja, E é um multi-conjunto de pares ordenados).

Um **grafo valorado** é um grafo em que cada aresta tem um valor associado.

Um **grafo é imersível** em uma superfície S , se puder ser representado geometricamente em S de forma que arestas se cruzem apenas nas extremidades.

Um **grafo planar** é um grafo que é imersível no plano.

Definições relativas a “caminhamentos”

- **Caminho (walk):** sequência de vértices e arestas ($n \geq 1$)

$$x_1\{x_1, x_2\}x_2\{x_2, x_3\}x_3 \dots x_{n-1}\{x_{n-1}, x_n\}x_n.$$

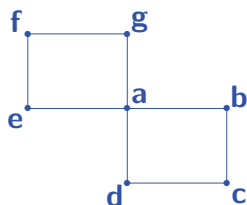
(No caso de arestas múltiplas, deve-se indicar qual delas está sendo usada.)

- Notação abreviada: $x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n$.
- x_1 e x_n : **extremidades do caminho.**
- **Comprimento do caminho:** número de arestas do mesmo (isto é, $n - 1$).
- **Caminho fechado:** caminho em que $x_1 = x_n$.
- **Caminho gerador (spanning):** caminho que contém todos os vértices do grafo.

Definições relativas a “caminhamentos”

- **Caminho simples (path):** caminho sem vértices repetidos.
- **Trajeto (trail):** caminho sem arestas repetidas.
- **Circuito:** trajeto fechado.
- **Ciclo:** circuito com pelo menos uma aresta, no qual o único vértice repetido é $x_1 = x_n$.
 - n -ciclo: ciclo de tamanho n .
 - 1-ciclo: laço.
 - 2-ciclo: par de arestas múltiplas.
 - 3-ciclo: chamado **triângulo**.
 - 4-ciclo: chamado **quadrilátero**, e assim por diante...

Um exemplo



- $a\{a, b\}b\{b, c\}c\{c, d\}d$: caminho de tamanho 3; abr.: $abcd$.
- $abcb$: caminho que não é simples, nem é trajeto.
- $abcdae$: trajeto que não é caminho simples.
- abc : caminho simples.
- aba : caminho fechado que não é circuito.
- $abcdae fga$: circuito que não é ciclo.
- $abcd a$: 4-ciclo (quadrilátero).

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Um circuito Euleriano é um circuito que inclui cada aresta exatamente uma vez.

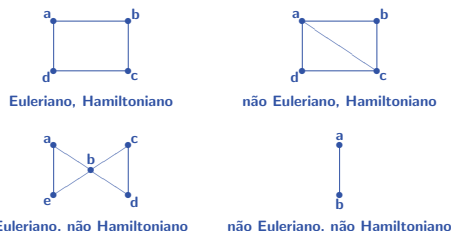
Um grafo Euleriano é um grafo que contém um circuito Euleriano.

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo gerador.

Um grafo Hamiltoniano é um grafo que contém um ciclo Hamiltoniano.

Exemplos

Os conceitos de grafo Euleriano e grafo Hamiltoniano são independentes:



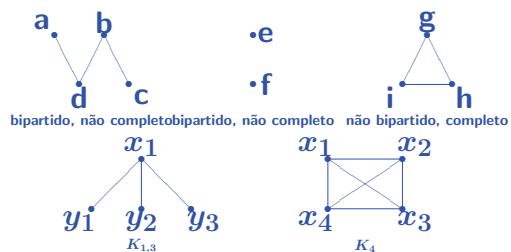
Tipos de grafos importantes

Grafo completo com n vértices (K_n): grafo simples em que cada vértice é adjacente a todos os outros. Tem, portanto, $C(n, 2)$ arestas.

Grafo bipartido: grafo cujos vértices podem ser particionados em dois conjuntos, de forma que as extremidades de qualquer aresta não estejam no mesmo conjunto.

Grafo bipartido completo ($K_{m,n}$): grafo bipartido em que cada vértice de um dos conjuntos é adjacente a todo vértice do outro conjunto. Tem, portanto, $m \times n$ arestas.

Exemplos



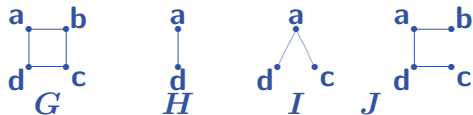
Reformulação dos 3 problemas

- $K_{3,3}$ é planar?
- O grafo das pontes de Königsberg é Euleriano?
- Para o grafo valorado completo representando os pontos do golfo do México, qual é o ciclo Hamiltoniano de menor tamanho?

Mais algumas definições

- G é subgrafo de H , $G \subseteq H$, se todos os vértices e arestas de G são vértices e arestas de H .
- Um subgrafo gerador (**spanning**) é um subgrafo que contém todos os vértices do grafo.

Exemplos:

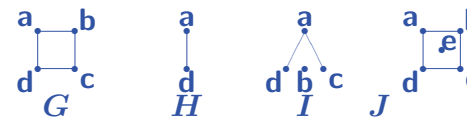


- $G \subseteq G$, $H \subseteq G$, $J \subseteq G$, $H \subseteq I$, $H \subseteq J$;
- J é um subgrafo gerador para G .

Grafo conectado (conexo)

Um grafo é **conectado** se existe caminho entre quaisquer dois vértices do mesmo. Caso contrário, é desconectado.

Exemplos:



- G : conectado, Euleriano, Hamiltoniano.
- H : conectado, não Euleriano, não Hamiltoniano;
- I : desconectado, não Euleriano, não Hamiltoniano;
- J : desconectado, Euleriano, não Hamiltoniano.

Componente conectado, complemento

Um componente (conectado) de um grafo é um subgrafo conectado “maximal”. Ou seja, H é um componente de G se, e somente se,

- H é um subgrafo conectado de G ; e
- nenhum outro subgrafo conectado de G contém H .

O complemento de um grafo simples $G = (V, E)$ é o grafo simples

$$G^c = (V, E'),$$

onde $\{v, w\} \in E'$ se, e somente se, $\{v, w\} \notin E$. (Quantas arestas tem o complemento de um grafo simples?)

Um exemplo



- G é conectado (tem 1 componente)
- G^c é desconectado, e tem 2 componentes.

Subdivisão

Subdivisão de uma aresta $\{v, w\}$ de G : substituição de $\{v, w\}$ por duas arestas $\{v, z\}$ e $\{z, w\}$, sendo z um novo vértice adicionado a G .

Um grafo G_2 é um grafo subdivisão de G_1 quando G_2 é obtido de G_1 pela subdivisão das arestas de G_1 .

Exemplo:

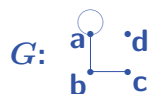
qual é o grafo subdivisão do grafo das pontes de Königsberg?

O LEMA DO APERTO DE MÃOS

Definições preliminares

- O grau de um vértice v , $\text{grau}(v)$, é o número de arestas incidentes a v , com cada laço contado 2 vezes.
- Vértice isolado: vértice de grau 0;
- Extremidade de um grafo: vértice de grau 1;
- Grafo regular de grau n : grafo cujos vértices têm grau n .

Exemplos:



- Em G : $\text{grau}(a) = 3$, $\text{grau}(b) = 2$, $\text{grau}(c) = 1$ (c é extremidade de G), $\text{grau}(d) = 0$ (d é isolado);
- K_n é regular de grau $n - 1$ e $K_{n,n}$ é regular de grau n ;
- $K_{m,n}$ não é regular, se $m \neq n$.

O LEMA DO APERTO DE MÃOS

Lema do aperto de mãos

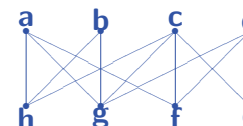
Em um grafo, a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

Prova

Cada aresta contribui com 2 unidades para a soma (inclusive os laços), por definição.

Exemplo:

Quantas arestas tem o grafo abaixo?



Um corolário

Corolário

Em um grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Prova

Uma soma de números naturais é par se, e somente se, é par a quantidade de números ímpares. Pelo lema do aperto de mãos, a soma dos graus é par; logo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Outro corolário

Corolário

Em um grupo, o número de pessoas que apertaram as mãos de um número ímpar de pessoas do grupo é par.

Prova

Modelagem: cada pessoa, um vértice; cada aperto de mãos, uma aresta (ligando os vértices correspondentes às pessoas que apertaram as mãos). Com isto, o grau de um vértice é o número de pessoas cujas mãos a pessoa representada pelo vértice apertou; e o corolário segue do anterior.

Sequência de graus de um grafo

Uma **sequência de graus** é uma sequência de números naturais em ordem decrescente.

Uma sequência de graus g_1, g_2, \dots, g_n é **gráfica** se existe um grafo simples com n vértices v_1, v_2, \dots, v_n tais que o grau de v_i é g_i .

Exemplos:

- 2, 1, 1: sequência de graus gráfica;
- 2, 2, 2: sequência de graus gráfica;
- 3, 3, 3: sequência de graus não gráfica (pelo lema do aperto de mãos);
- 3, 3, 0: sequência de graus não gráfica.

A **sequência de graus de um grafo** (não necessariamente simples) G é a sequência dos graus dos vértices de G , em ordem decrescente.

ISOMORFISMO

Isomorfismo

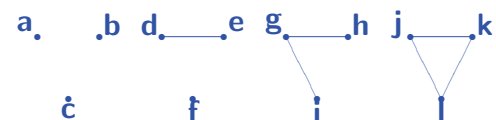
As **propriedades essenciais de grafos** são **estruturais**:
 não dependem dos nomes dos vértices.

Dois grafos G e H são **isomorfos**, $G \cong H$, se e somente se:

- existe uma correspondência um-para-um entre os vértices de G e H , tal que:
- o número de arestas entre dois vértices de G é idêntico ao número de arestas entre os vértices correspondentes de H .

Exemplo

Os 4 grafos simples de 3 vértices, não isomorfos:

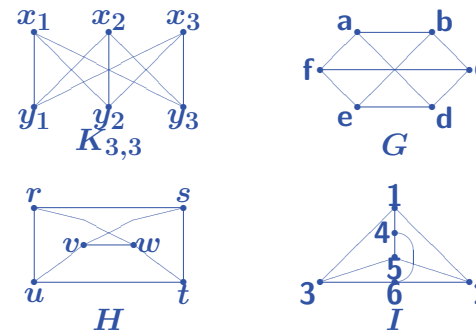


Algumas observações

- 2 grafos simples são isomorfos se, e somente se, seus complementos são isomorfos.
- A relação “é isomorfo a” é relação de equivalência:
 - reflexiva
 - simétrica
 - transitiva

Exemplo

G , H e I são isomorfos a $K_{3,3}$. Logo, eles são isomorfos entre si.



Como determinar se dois grafos são isomorfos?

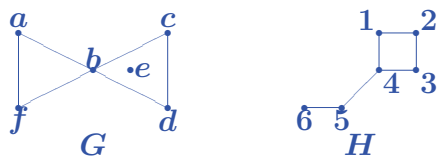
- Verificar todas as $n!$ correspondências (n : número de vértices): intratável.
 - $2^n < n! < 2^{n^2}$: logo, o número de correspondências é exponencial com relação ao número de vértices.
- Não existe (até o momento) técnica eficiente. Logo: usar bom senso e heurísticas.

Como determinar se dois grafos são isomorfos?

Para mostrar que dois grafos **não** são isomorfos:

- Comparar número de vértices, número de arestas, as sequências de graus dos grafos.
- Comparar números de componentes.
- Verificar alguns subgrafos simples.
- Comparar complementos.
- Etc...

Um exemplo



Razões pelas quais G e H não são isomorfos entre si:

- H é conectado e G não é.
- G contém um triângulo e H não contém.
- G contém um vértice de grau 4 e H não contém.
- G tem 2 componentes e H não tem.
- G^c tem um vértice de grau 5 e H^c não tem.
- Etc....

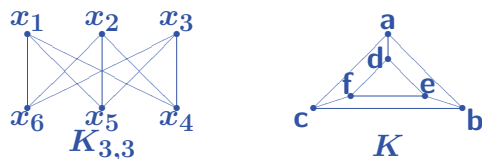
Isomorfismo é difícil

Como encontrar uma correspondência um-para-um, que demonstre que dois grafos são isomorfos?

- Não existe técnica eficiente.
- Grafos de tamanho moderado: usar bom senso.

Um exemplo

Dois grafos com número idêntico de vértices, arestas e sequência de graus, **não** isomorfos:



$K_{3,3}$ e K não são isomorfos:

K contém um triângulo, e $K_{3,3}$ não contém.

Outra razão: K é planar, $K_{3,3}$ não é...

PLANARIDADE

Planaridade

Um grafo é planar se, e somente se, pode ser imerso no plano.

Basta considerar grafos simples, pois:

- Um grafo G é planar se, e somente se, o grafo simples obtido
 - removendo-se todos os laços de G , e
 - substituindo-se cada aresta múltipla de G por uma aresta, é planar.
- Um grafo é planar se, e somente se, sua subdivisão é planar.

Determinar planaridade de grafos

Existem técnicas eficientes para determinar se um grafo simples é planar.

A seguir, algumas técnicas mais fáceis para seres humanos.

Em qualquer imersão, ciclos devem ser traçados como “círculos”:

- traçar primeiro ciclos longos, depois tentar traçar o resto.

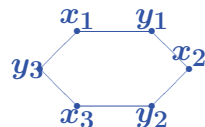
Um exemplo

Proposição:

$K_{3,3}$ não é planar.

Prova: (Método dos ciclos longos)

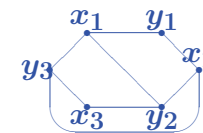
Em qualquer imersão, deve-se traçar o ciclo:



Continuação do exemplo

As 3 arestas restantes são: $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$ e $\{x_3, y_1\}$. Dois casos:

- $\{x_1, y_2\}$ dentro do ciclo.
Então $\{x_2, y_3\}$ deve ser traçado fora:



Não há como traçar $\{x_3, y_1\}$.

- $\{x_1, y_2\}$ fora do ciclo: análogo.

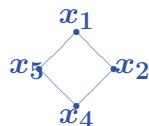
Outro exemplo

Proposição:

K_5 não é planar.

Prova:

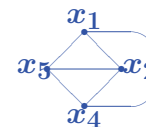
Em qualquer imersão, deve-se traçar o ciclo:



Continuação do exemplo

Faltam o vértice x_3 e as arestas $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_4\}$ e $\{x_2, x_5\}$. Dois casos:

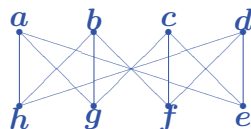
- $\{x_2, x_5\}$ dentro do ciclo.
Então $\{x_1, x_4\}$ deve ser traçado fora:



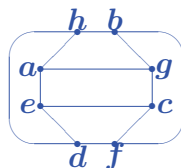
Não há como colocar x_3 .

- $\{x_2, x_5\}$ fora do ciclo: análogo.

Exemplo



Traçando o maior ciclo, e inserindo as arestas restantes:

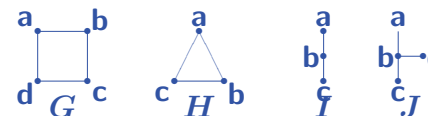


Homomorfismo de grafos

Dois grafos, G e H , são homomorfos se, e somente se, existe um grafo I tal que:

- G é isomorfo a algum grafo obtido de I por meio de uma sequência de subdivisões de (zero ou mais) arestas de I .
- H é isomorfo a algum grafo obtido de I por meio de uma sequência de subdivisões de (zero ou mais) arestas de I .

Exemplo:



- G e H são homomorfos;
- I e J não são homomorfos.

Um teorema importante

Teorema de Kuratowski:

Um grafo **não é planar** se, e somente se, tem um subgrafo homomorfo a $K_{3,3}$ ou K_3 .

Prova:

Veja [Liu, 1968], por exemplo.

Outro teorema

Fórmula de Euler:

Seja G um grafo **conectado planar** com V vértices e E arestas. Seja F o número de faces (regiões) em que o plano é dividido em uma **imersão** de G no plano. Então $V - E + F = 2$.

Prova:

Por indução sobre $N(E)$.

(No passo indutivo, considera-se 2 casos: grafos com e sem ciclos.)

Um corolário

Corolário:

Seja G um grafo **simples planar** com V vértices e E arestas, $E > 1$. Então $E \leq 3V - 6$.

Prova:

Segue do fato de que $3F \leq 2E$, e da fórmula de Euler.

FIM