CAMINHAMENTOS
BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 7

Newton José Vieira

UFMG

30 de julho de 2007

SUMÁRIO

CIRCUITOS EULERIANOS

Grafo Euleriano

Proposição:

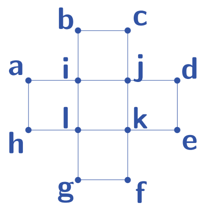
Um grafo conexo é **Euleriano** se, e somente se, o grau de todo vértice é par.

Prova:

Em um circuito, o número de arestas incidentes a cada vértice é par (metade de entrada e metade de saída do vértice). Logo, se o grafo é Euleriano, o grau de todo vértice é par.

Suponha que o grau de todo vértice é par. Construindo-se um trajeto começando por um vértice x_1, e indo tão longe quanto possível, sempre tomando uma aresta ainda não utilizada, até voltar a x_1, forma-se um circuito (pois o número de arestas é finito, e haverá sempre pares de entrada/saída para cada vértice, exceto para x_1). Como o grafo é conexo, os circuitos assim formados (se forem formados mais de um) podem ser "combinados" em um circuito Euleriano.

Exemplo:



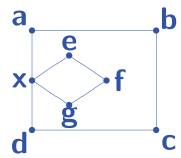
Grafo randomicamente Euleriano

Um grafo é **randomicamente Euleriano a partir de** x se, e somente se, todo trajeto construido começando no vértice x, e continuando em frente sempre que possível, é circuito Euleriano.

Aplicação: planejamento de uma mostra de quadros.

Exemplo:

O grafo a seguir é randomicamente Euleriano a partir de x:



Uma condição necessária e suficiente

Proposição:

Um grafo Euleriano G é **randomicamente Euleriano a partir de** x se, e somente se, x aparece em todo ciclo de G.

Prova:

Exercício.

Trajeto Euleriano

Um **trajeto Euleriano** é um trajeto não fechado que inclui todas as arestas do grafo.

Proposição:

Um grafo conexo tem um **trajeto Euleriano** se, e somente se, tem exatamente 2 vértices de grau ímpar. E estes 2 vértices são as extremidades do trajeto.

Prova:

Exercício.

Número mínimo de trajetos

Proposição:

O número mínimo de trajetos necessário para particionar o conjunto das arestas de um grafo conexo é a metade do número de vértices de grau ímpar, exceto quando não há vertices de grau ímpar; neste caso, o número mínimo é 1.

Prova:

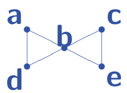
Exercício.

Exemplo: grafo das pontes de Königsberg.

CICLOS HAMILTONIANOS

Um caminho Hamiltoniano é um caminho simples gerador.

- Todo grafo Hamiltoniano contém caminho Hamiltoniano.
- Existem grafos não Hamiltonianos que contêm caminhos Hamiltonianos. Exemplo:



Como determinar se o grafo é Hamiltoniano?

Basta considerar grafos simples, pois:

- Com relação a caminhos Hamiltonianos: laços e arestas múltiplas não são relevantes para a existência dos mesmos.
- Com relação a ciclos Hamiltonianos: laços e arestas múltiplas só são relevantes nos grafos triviais:

e

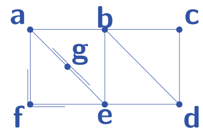
- Não há caracterização simples nem eficiente para ciclos e caminhos Hamiltonianos.

Técnicas para grafos de tamanho moderado

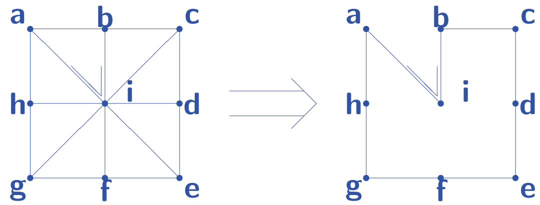
- Usar o fato de que um ciclo Hamiltoniano contém **exatamente duas** das arestas incidentes a cada vértice.

Técnicas para grafos de tamanho moderado

Exemplos:



O circuito induzido não inclui todos os vértices.



Escolhendo $\{a, i\} i \{i, b\}$

Técnicas para grafos de tamanho moderado

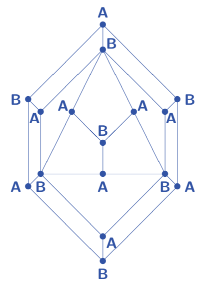
- Se for possível particionar os vértices em dois conjuntos, de forma que

  se x e y são adjacentes,
  então x é membro de um e y é membro do outro,

  então, em caminhos ou ciclos Hamiltonianos, deve haver **alternância** de vértices dos dois conjuntos.

Técnicas para grafos de tamanho moderado

Exemplo:



- Existem 9 vértices do tipo A e 7 do tipo B.
- Logo, não existe ciclo nem caminho Hamiltoniano.

Uma condição suficiente

Proposição:

Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices tal que $grau(u) + grau(v) \geq n$ para todo par de vértices distintos não adjacentes u e v. Então G é Hamiltoniano.

Prova:

Suponha o contrário. Seja H um contra-exemplo, e adicionemos arestas a H até que a adição de uma aresta $\{u, v\}$ resulte em um grafo Hamiltoniano. Seja o caminho Hamiltoniano com extremidades u e v:

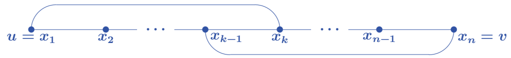
$$u = x_1\{x_1, x_2\}x_2 \ldots x_{n-1}\{x_{n-1}, x_n\}x_n = v.$$

Uma condição suficiente

Se para qualquer $2 \leq k \leq n$, $\{x_1, x_k\}$ é uma aresta, então $\{x_{k-1}, x_n\}$ não é uma aresta, senão

$$x_1\{x_1, x_k\}x_k \ldots x_n\{x_n, x_{k-1}\}x_{k-1} \ldots x_2\{x_2, x_1\}x_1 = v$$

seria um ciclo Hamiltoniano:



Portanto, para cada vértice x_k adjacente a u existe um vértice diferente não adjacente a v. Logo, $grau(u) + grau(v) \leq n - 1$, uma contradição.

Uma condição suficiente

Analogamente,

Proposição:

Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices tal que $grau(u) + grau(v) \geq n - 1$ para todo par de vértices distintos não adjacentes u e v. Então G tem caminho Hamiltoniano.

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O Problema do Caixeiro Viajante

O **problema do menor caminho fechado gerador**:

encontrar um menor caminho fechado gerador em um grafo valorado completo.

Um grafo é **Euclidiano** se, e somente se, é um grafo valorado completo tal que $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ para quaisquer 3 vértices u, v e w.

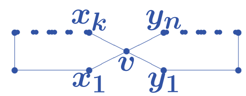
O Problema do Caixeiro Viajante

Proposição:

Se G é um grafo Euclidiano e C é um **menor caminho fechado gerador** em G, então existe um ciclo Hamiltoniano do mesmo comprimento que C.

Prova:

Suponha que C tem um vértice repetido, como mostra a figura:



$$C = vx_1 \cdots x_k v y_1 \cdots y_n v$$

Então $C' = vx_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_n v$ não é maior que C. Assim, pode-se eliminar todas as repetições de vértices de C, até obter um ciclo Hamiltoniano de comprimento igual ao de C.

O Problema do Caixeiro Viajante

O **problema do caixeiro viajante**:

encontrar um **menor ciclo Hamiltoniano** em um grafo valorado completo.

Não há solução eficiente conhecida para o problema do caixeiro viajante.

$\Rightarrow$ Usar **heurísticas**.

Exemplo: Algoritmo do vizinho mais próximo

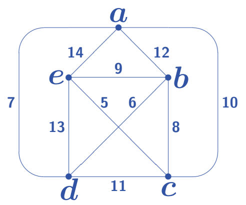
Escolha um vértice v;
$C := \langle v \rangle$;
enquanto C não contém todos os vértices **faça**
  seja x o último vértice de C;
  seja y um dos vértices mais próximos de x;
  $C := C \oplus y$
fim;
$C := C \oplus v$.

Observações:

- O comprimento de C pode depender de v.
- Este é um exemplo de **algoritmo guloso**.

Exemplo: Algoritmo do vizinho mais próximo

Exemplo:



- Começando em a: comprimento 40.
- Começando em b: comprimento 37 (menor comprimento).

Desempenho do algoritmo do vizinho mais próximo

Proposição:

Seja G um grafo Euclidiano com n vértices. Seja $T_{\text{VMP}}(v)$ o comprimento obtido pelo método do vizinho mais próximo começando em v, e seja T_0 o comprimento de um ciclo Hamiltoniano mínimo. Então:

(1) $T_{\text{VMP}}(v)/T_0 \leq (\lceil \log_2 n \rceil + 1)/2$.

(2) Para todo m, existe um grafo Euclidiano G com $n \geq m$ vértices tal que $T_{\text{VMP}}(v)/T_0 > (\log_2(n+1) + 4/3)/3$.

Algumas observações

- Para um algoritmo qualquer, AQ, $T_{\text{AQ}}(v)/T_0 \geq 1$.
- Para um algoritmo ideal, AI, $T_{\text{AI}}(v)/T_0 = 1$.
- $T_{\text{VMP}}(v)/T_0$ aumenta com n.
- Se o grafo não for Euclidiano, o algoritmo do vizinho mais próximo pode ter um desempenho muito ruim.

Observações finais

Todo algoritmo conhecido para o Problema do Caixeiro Viajante contém alguma restrição sobre os grafos para os quais dão resultados razoáveis (vide próxima proposição).

Proposição:

Se existe um algoritmo eficiente, AE, tal que $T_{AE}(v)/T_0 = \mathit{constante}$ para qualquer grafo, então existe uma solução eficiente para o Problema do Caixeiro Viajante.

Problemas considerados até o momento

- **Problema da Planaridade (PP): O grafo é planar?**
- **Problema do Circuito Euleriano (PCE): O grafo é Euleriano?**
- **Problema do Trajeto Euleriano (PTE): O grafo tem um trajeto Euleriano?**
- **Problema do Isomorfismo (PI): Dois grafos são isomorfos?**
- **Problema do Ciclo Hamiltoniano (PCiH): O grafo é Hamiltoniano?**
- **Problema do Caminho Hamiltoniano (PCaH): O grafo tem um caminho Hamiltoniano?**
- **Problema do Caixeiro Viajante (PCV): Qual é o menor ciclo Hamiltoniano de um grafo valorado completo?**
- **Problema do Menor Caminho Fechado Gerador (PMCFG): Qual é o menor caminho fechado gerador de um grafo valorado completo?**

FIM