O PRINCíPIO DA CASA DE POMBOS
BASEADO EM SANTOS, MELLO E MURARI (2002), CAP. 7

Newton José Vieira

UFMG

28 de agosto de 2007

A versão mais simples

- **Teorema:** Se há n casas e mais de n pombos são distribuídos entre elas, então alguma casa conterá pelo menos dois pombos.

A versão mais simples

- **Teorema:** Se há n casas e mais de n pombos são distribuídos entre elas, então alguma casa conterá pelo menos dois pombos.
- **Demonstração:** Se cada uma das n casas contiver no máximo um pombo, então terão sido distribuídos no máximo n pombos, o que contradiz o fato de que são distribuídos mais de n pombos.

A versão mais simples

- **Teorema:** Se há n casas e mais de n pombos são distribuídos entre elas, então alguma casa conterá pelo menos dois pombos.
- **Demonstração:** Se cada uma das n casas contiver no máximo um pombo, então terão sido distribuídos no máximo n pombos, o que contradiz o fato de que são distribuídos mais de n pombos.
- **Princípio das gavetas de Dirichlet:**

  Se colocarmos n objetos em r gavetas, sendo $n > r$, então alguma gaveta conterá pelo menos dois objetos.

Exemplos simples

- Em uma festa com mais de 12 crianças, há pelo menos duas que nasceram no mesmo mês.
- Em uma festa com mais de 7 crianças, há pelo menos duas que nasceram no mesmo dia da semana.
- Em uma festa com mais de 366 crianças, há pelo menos duas que aniversariam no mesmo dia.

Mais um exemplo

- Qualquer subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ de 7 elementos possui dois subconjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.
  - Subconjunto com a menor soma: $\{1\}$. Soma: 1.
  - Subconjunto com a maior soma: $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Soma: 63.
  - Número de subconjuntos (exceto $\emptyset$) de um conjunto de 7 elementos: $2^7 - 1$.

Mais um exemplo

- Qualquer subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ de $n + 1$ elementos possui um par de elementos primos entre si.
  - Subconjuntos sem números consecutivos: $\{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$ e $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$.
  - Cada um dos subconjuntos acima contém n elementos.
  - Um subconjunto com $n + 1$ elementos contém dois elementos consecutivos (primos entre si).

Uma generalização

- **Teorema**: Se há n casas e mais de nk pombos são distribuídos entre elas, então alguma casa contém pelo menos $k + 1$ pombos.
- **Demonstração**: Se cada uma das n casas contiver no máximo k pombos, então terão sido distribuídos no máximo nk pombos, o que contradiz o fato de que são distribuídos mais de nk pombos.

Uma generalização

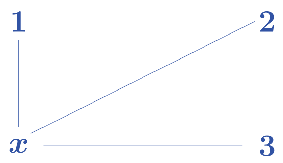
- **Teorema**: Se há n casas e mais de nk pombos são distribuídos entre elas, então alguma casa contém pelo menos $k+1$ pombos.
- **Demonstração**: Se cada uma das n casas contiver no máximo k pombos, então terão sido distribuídos no máximo nk pombos, o que contradiz o fato de que são distribuídos mais de nk pombos.
- Exemplo: Em uma festa de aniversário com 37 crianças, pelo menos 4 nasceram no mesmo mês, pois $37 = 12.3 + 1$.
- Exemplo: Em um grupo de 20 pessoas, pelo menos 3 nasceram no mesmo dia da semana, pois $20 = 7.2 + 6$.

Exemplo

- Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 verdes, 9 azuis e 6 amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 3 bolas da mesma cor?
  - Casas: as 4 cores.
  - Pombos: bolas que devemos retirar.
  - A resposta é $4.2 + 1 = 9$.

Exemplo

- Sejam 6 pontos no espaço, não havendo três alinhados. Cada par de pontos é ligado por um segmento de reta e cada um desses 15 segmentos é pintado de azul ou de vermelho. Prove que existe um triângulo com os três lados da mesma cor.
  - Um ponto x está ligado a 5 outros (as 5 retas são os pombos).
  - Há duas cores para pintar (as cores são as casas).
  - Logo, três dos 5 segmentos de reta têm a mesma cor:



  - Considere o triângulo 123 . . .

FIM