

MATEMÁTICA DISCRETA CONCEITOS PRELIMINARES

Newton José Vieira
UFMG
21 de agosto de 2007

CONJUNTOS

SUMÁRIO

- Teoria dos Conjuntos
- Relações e Funções
- Fundamentos de Lógica
- Técnicas Elementares de Prova

A NOÇÃO DE CONJUNTO

- O que têm em comum as seguintes entidades?
 - um grupo de pessoas
 - um rebanho de animais
 - um buquê de flores
 - uma dúzia de ovos

A NOÇÃO DE CONJUNTO

- O que têm em comum as seguintes entidades?

um grupo de pessoas
um rebanho de animais
um buquê de flores
uma dúzia de ovos

- Conjunto

Coleção de objetos denominados elementos ou membros do conjunto.

A NOÇÃO DE CONJUNTO

- O que têm em comum as seguintes entidades?

um grupo de pessoas
um rebanho de animais
um buquê de flores
uma dúzia de ovos

- Conjunto

Coleção não ordenada de objetos (denominados elementos ou membros do conjunto).

- Notação

$x \in A$: x pertence a A

$x \notin A$: x não pertence a A

COMO DEFINIR UM CONJUNTO

- Listar seus elementos entre chaves.

Exemplos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

$V = \{a, e, i, o, u\}$;

$F = \{\text{laranja, banana, abacaxi}\}$.

COMO DEFINIR UM CONJUNTO

- Listar seus elementos entre chaves.

Exemplos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

$V = \{a, e, i, o, u\}$;

$F = \{\text{laranja, banana, abacaxi}\}$.

- Utilizar a forma $A = \{x : P(x)\}$.

Exemplo: $A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo, ímpar e menor que } 10\}$.

COMO DEFINIR UM CONJUNTO

- Listar seus elementos entre chaves.

Exemplos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

$V = \{a, e, i, o, u\}$;

$F = \{\text{laranja, banana, abacaxi}\}$.

- Utilizar a forma $A = \{x : P(x)\}$.

Exemplo: $A = \{x : x \text{ é um inteiro positivo, ímpar e menor que } 10\}$.

- Fazer uma definição recursiva.

Exemplo: (a) $1 \in A$,

(b) se $x \in A$ e $x + 2 < 10$, então $x + 2 \in A$.

OBSERVAÇÕES

- Conjuntos podem ser definidos por meio de operações sobre outros conjuntos previamente definidos.

Exemplo: $A = \{1, 9\} \cup B$.

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definições.

Exemplo: $\{x : x \text{ é um número real entre } 0 \text{ e } 1\}$ não pode ser definido recursivamente.

- $P(x)$ não pode ser “qualquer” propriedade.

Exemplo (paradoxo de Russel): $S = \{x : x \notin x\}$;
 $S \in S?$

ALGUNS CONJUNTOS IMPORTANTES

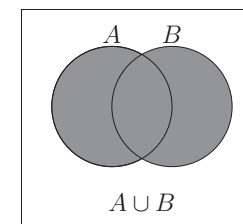
- \emptyset : $\emptyset = \{\}$, o conjunto vazio (observe que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$).
- \mathbf{N} : números naturais: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbf{Z} : números inteiros: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbf{Q} : números racionais: $\{x/y : x \in \mathbf{Z} \text{ e } y \in \mathbf{Z} \text{ e } y \neq 0\}$.
- \mathbf{R} : números reais.

OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- União:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Diagrama de Venn:

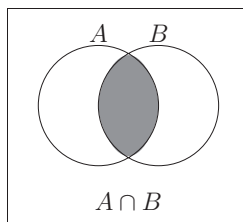


OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- **Interseccção:**

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Diagrama de Venn:

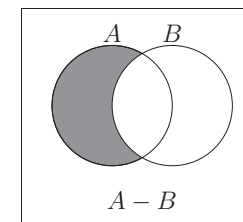


OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- **Diferença:**

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Diagrama de Venn:



ALGUMAS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

- **Idempotência:** $A \cup A = A \cap A = A.$
- **Comutatividade:** $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$
- **Associatividade:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
- **Absorção:** $A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A.$
- **Distributividade:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- **De Morgan:** $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C);$
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$

MAIS TRÊS OPERAÇÕES

- **Complemento:**

$$\bar{A} = U - A \text{ (} U \text{ é o conjunto universo).}$$

- **União generalizada:**

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

- **Interseção generalizada:**

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

RELAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

- **Continência:**

A está contido em B se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B . Ou seja:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- **Igualdade:**

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

- **Subconjunto próprio:**

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } A \neq B$$

ALGUMAS PROPRIEDADES DA CONTINÊNCIA

- **Reflexividade:** $A \subseteq A$.
- **Transitividade:** $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.
- $A \subset B \Rightarrow A \neq B$ e $B \not\subseteq A$.
- $A \subseteq B$ e $A \not\subseteq C \Rightarrow B \not\subseteq C$.

CONJUNTOS DISJUNTOS

- A e B são disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

PARTIÇÃO

Uma partição de um conjunto A é um conjunto

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tal que:

- $X_i \neq \emptyset$, para $1 \leq i \leq n$;
- $X_i \cap X_j = \emptyset$, para $1 \leq i \neq j \leq n$; e
- $\bigcup_{i=1}^n X_i = A$.

CONJUNTO POTÊNCIA

- $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
- Exemplo: $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- Quantos elementos tem o conjunto potência?

PRODUTO CARTESIANO

- Par ordenado: (x, y) .
Propriedade fundamental: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

- Produto cartesiano de A e B :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

- Exemplos: $\{a, b\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$.
 $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
- Notação: A^2 denota $A \times A = \{(x, y) : x, y \in A\}$

RELAÇÕES E FUNÇÕES

RELAÇÕES BINÁRIAS

Uma relação binária sobre A e B é um subconjunto de $A \times B$.

- Notações alternativas para $(x, y) \in R$: xRy e $R(x, y)$.
- Exemplo: Relação $<$ sobre \mathbf{N} :

$$< = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (1, 2), (1, 3), \dots\}$$

PROPRIEDADES DE RELAÇÕES BINÁRIAS

Seja R uma relação binária sobre A . Então:

- R é reflexiva $\Leftrightarrow xRx$ para todo $x \in A$.
 - Exemplos: \leq e $=$ sobre \mathbb{N} .
- R é simétrica $\Leftrightarrow xRy \Rightarrow yRx$ para todo $x, y \in A$.
 - Exemplos: $=$ sobre \mathbb{N} , e *irmãos* sobre *Pessoas*.
- R é transitiva $\Leftrightarrow xRy$ e $yRz \Rightarrow xRz$ para todo $x, y, z \in A$.
 - Exemplos: $<$, \leq e $=$ sobre \mathbb{N} .

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Relação de equivalência: aquela que é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Exemplo: $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x + y \text{ é par}\}$

Seja R uma relação de equivalência sobre A , e $a \in A$. A classe de equivalência de a é:

$$E_a = \{b : b \in A \text{ e } aRb\}.$$

- Exemplo: para a relação

$$R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x + y \text{ é par}\}$$

tem-se:

$$E_n = \begin{cases} \{0, 2, 4, 6, \dots\} & \text{se } n \text{ é par} \\ \{1, 3, 5, 7, \dots\} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Proposição: Seja uma relação de equivalência R sobre um conjunto não vazio A . Então $\{E_a : a \in A\}$ é uma partição de A .

Prova: basta mostrar que:

- $E_a \neq \emptyset$ para todo $a \in A$;
- $\cup_{a \in A} E_a = A$; e
- $E_a \cap E_b = \emptyset$ se $E_a \neq E_b$.

FUNÇÕES

Uma função f , de A para B , é uma relação sobre A e B tal que:

- para cada $a \in A$ existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$.
- Exemplos:
 - pai de Pessoas para Pessoas.
 - $+$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para \mathbb{R} .

FUNÇÕES

Notação e terminologia:

- $f : A \rightarrow B$ significa que f é uma função de A para B .
- $b = f(a)$ significa $(a, b) \in f$.
- Se $b = f(a)$, então b é a **imagem** de a .
- Seja $f : A \rightarrow B$. Então:
 - **domínio** de f : A ;
 - **contra-domínio** de f : B ;
 - **imagem** de f : $\{b : \text{existe } a \text{ tal que } f(a) = b\}$.

FUNÇÕES

Três tipos de funções:

- f é **injetiva** (“one-to-one”) se
 $f(a_1) = b$ e $f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$.
- f é **sobrejetiva** (“onto”) se
a imagem de f é o contra-domínio de f .
- f é **bijetiva** (correspondência um-para-um) se
é injetiva e sobrejetiva.

FUNDAMENTOS DE LÓGICA

O CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

- **Proposição**: afirmação que é verdadeira ou falsa.
- **Exemplos**:
 - Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais. (verdadeira)
 - Campinas é a capital de São Paulo. (falsa)
 - $2 + 2 = 4$. (verdadeira)
 - $1 + 1 = 1$. (falsa)

PROPOSIÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

- **Proposição simples:** representada por meio de variável proposicional (p, q, r, s, \dots).
- **Proposição composta:** combinação de proposições por meio de conectivos lógicos.

- **Conectivos lógicos:**

Negação: \neg

Conjunção: \wedge

Disjunção: \vee

Implicação: \Rightarrow

Bicondicional: \Leftrightarrow

EXEMPLOS DE PROPOSIÇÃO SIMPLES E COMPOSTAS

- **Proposições simples:**

p : você fez mais de 80 km/h.

q : você foi multado.

- **Proposições compostas:**

$\neg p$: você não fez mais de 80 km/h.

$p \wedge \neg q$: você fez mais de 80 km/h, mas não foi multado.

$\neg p \vee q$: você não fez mais de 80 km/h ou foi multado.

$\neg p \Rightarrow \neg q$: se você não fez mais de 80 km/h, então não foi multado.

TABELAS DA VERDADE:

- **Negação:**

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

TABELAS DA VERDADE:

- **Conjunção:**

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABELAS DA VERDADE:• **Disjunção:**

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABELAS DA VERDADE:• **Condicional:**

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABELAS DA VERDADE:• **Bicondicional:**

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXPRESSÕES PARA A CONDICIONAL

- $\alpha \Rightarrow \beta$
- se α então β
- α implica β
- se α , β
- α somente se β
- α é suficiente para β
- β se α
- β caso α
- β é necessário para α

EXPRESSÕES PARA A BICONDICIONAL

- $\alpha \Leftrightarrow \beta$
- α se e somente se β
- α é necessário e suficiente para β
- se α então β , e vice-versa

TIPOS DE FÓRMULAS

- **Tautologia:** proposição que é sempre verdadeira.
- **Contradição:** proposição que é sempre falsa.
- **Contingência:** proposição que não é tautologia nem contradição.

EXEMPLOS

		contingência	tautologia	contradição
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	$p \wedge \neg(p \vee q)$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

CONSEQUÊNCIA LÓGICA

- α é consequência lógica de β , $\beta \models \alpha$, se e somente se α é verdadeira sempre que β é verdadeira.
- **Exemplo:** $p \wedge (p \Rightarrow q) \models q$, pois:

$$\Rightarrow$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

$$\Leftarrow$$

CONSEQUÊNCIA LÓGICA

Teorema: $\beta \models \alpha$ se, e somente se, $\beta \Rightarrow \alpha$ é tautologia.

Exemplos:

- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é tautologia. Logo,

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \models p \Rightarrow r.$$

- $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$ é tautologia. Logo,

$$p \wedge \neg p \models q.$$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- α e β são logicamente equivalentes, $\beta \equiv \alpha$, se e somente se $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$

- **Exemplo:** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, pois:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Teorema: $\alpha \equiv \beta$ se, e somente se, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ é tautologia.

Exemplos:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é tautologia. Logo,

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

- $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ é tautologia. Logo,

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r.$$

PREDICADOS E QUANTIFICADORES

Exemplos de fórmulas atômicas:

- irmãos(Abel, Caim)
- $2 + 2 = 4$
- $x \geq 0$
- $x = y + 1$
- irmãos, $=$ e \geq são predicados.
- Predicados denotam relações.

PROPOSIÇÕES SIMPLES

Uma proposição simples é representada por uma fórmula atômica.

Exemplos:

- irmãos(Abel, Caim) (verdadeira)
- $2 + 2 = 4$ (verdadeira)
- $-1 \geq 0$ (falsa)
- $0 = -1 + 1$ (verdadeira)

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Representadas a partir de fórmulas atômicas, utilizando-se conectivos lógicos.

Exemplos:

- irmãos(Abel, Caim) \wedge irmãos(Caim, Abel)
- $2 + 2 = 4 \vee -1 \geq 0$

OS QUANTIFICADORES

Dois conectivos lógicos adicionais:

- Quantificador universal: \forall
- Quantificador existencial: \exists

Exemplos de fórmulas quantificadas:

- $\forall x x \geq 0$
- $\forall x \forall y (\text{irmãos}(x, y) \Rightarrow \text{irmãos}(y, x))$
- $\exists x x \geq 0$
- $\forall x \exists y x = y + 1$
- $\exists x \forall y x = y + 1$

EXEMPLO

Sejam:

- $A(x)$: x é uma arara.
- $M(x)$: x é multicolor.
- $Q(x)$: x é pequena.
- $G(x)$: x faz ninho em árvores altas.

EXEMPLO

Representação de algumas afirmações:

- Todas as araras são multicores.

$$\forall x (A(x) \Rightarrow M(x))$$

- Nenhum pássaro pequeno faz ninho em árvores altas.

$$\neg \exists x (Q(x) \wedge G(x))$$

- Pássaros que não fazem ninhos em árvores altas não são multicores.

$$\forall x (\neg G(x) \Rightarrow \neg M(x))$$

- Conclusão: Araras são grandes.

$$\forall x (A(x) \Rightarrow \neg Q(x))$$

ALGUMAS EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$
- $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS LÓGICAS

- $\forall x P(x) \models P(A)$
- $P(A) \models \exists x P(x)$
- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$

TÉCNICAS ELEMENTARES DE PROVA

Serão vistas técnicas de prova para proposições das formas:

- $\alpha \Rightarrow \beta$
- $\exists x \alpha(x)$
- $\neg \exists x \alpha(x)$
- $\forall x \alpha(x)$
- $\neg \forall x \alpha(x)$

além de raciocínio por casos e por absurdo.

TÉCNICAS PARA IMPLICAÇÃO ($\alpha \Rightarrow \beta$)

- Prova por vacuidade:

- Base:

contradição $\Rightarrow \beta$ é tautologia.

- Método:

Provar que α é falsa.

- Exemplo:

\emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.

TÉCNICAS PARA IMPLICAÇÃO ($\alpha \Rightarrow \beta$)

- Prova trivial:

- Base:

$\alpha \Rightarrow$ **tautologia** é tautologia.

- Método:

Provar que β é sempre verdadeira.

- Exemplo:

Se x e y são números irracionais então x^y é um número racional ou irracional.

TÉCNICAS PARA IMPLICAÇÃO ($\alpha \Rightarrow \beta$)

- Prova direta:

- Base:

Se $\alpha \models \beta$ então $\alpha \Rightarrow \beta$ é sempre verdadeira.

- Método:

a) supor que α é verdadeira;

b) mostrar que, neste caso, β é verdadeira.

- Exemplo:

Se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.

TÉCNICAS PARA IMPLICAÇÃO ($\alpha \Rightarrow \beta$)

- Prova indireta:

- Base:

$\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$.

- Método:

Provar $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$, utilizando um dos métodos acima.

- Exemplo:

O princípio da casa de pombos (pigeonhole principle): se $n + 1$ objetos são distribuídos em n caixas, então alguma caixa conterà pelo menos dois objetos.

TÉCNICA PARA A UNIVERSAL ($\forall x \alpha(x)$)

- Prova para a universal:

- Base:

Se $\beta \models \alpha(c)$ e c não ocorre em β , então $\beta \models \forall x \alpha(x)$.

- Método:

- Supor a existência de um c arbitrário;
- provar $\alpha(c)$.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE PROVA

- Prova por Casos:

- Base:

$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) \wedge (\alpha_1 \Rightarrow \beta) \wedge \dots \wedge (\alpha_n \Rightarrow \beta) \models \beta$

- Método para provar β dado que $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$:

- provar $\alpha_1 \Rightarrow \beta$;
- provar $\alpha_2 \Rightarrow \beta$;
- ⋮
- provar $\alpha_n \Rightarrow \beta$.

- Exemplo:

$\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE PROVA

- Prova por Contradição (redução a absurdo) de α :

- Base:

Se $\beta \wedge \neg \alpha \models$ **contradição**, então $\beta \models \alpha$.

- Método:

- Supor que α é sempre falsa;
- derivar uma contradição.

- Exemplo:

$\sqrt{2}$ é irracional.

PROVA DE NÃO EXISTÊNCIA (prova de $\neg \exists x \alpha(x)$)

- $\neg \exists x \alpha(x)$ é frequentemente provado por contradição:

- supor que existe um c tal que $\alpha(c)$;
- derivar uma contradição.

PROVA DE EXISTÊNCIA (prova de $\exists x \alpha(x)$)

- Prova construtiva:

- Base:

$$\alpha(c) \models \exists x \alpha(x).$$

- Método:

Provar $\alpha(c)$, para um elemento específico c .

- Exemplo:

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existem pelo menos n naturais consecutivos não primos.

PROVA DE EXISTÊNCIA (prova de $\exists x \alpha(x)$)

- Prova não construtiva:

- Método:

Provar $\exists x \alpha(x)$, sem exibir um x específico (por absurdo, por casos, ...).

- Exemplo:

Existem dois irracionais x e y tais que x^y é racional.

CONTRA-EXEMPLO (para provar $\neg \forall x \alpha(x)$)

- Prova por contra-exemplo:

- Base:

$$\neg \alpha(c) \models \neg \forall x \alpha(x)$$

- Método:

Exibir, ou construir, um elemento c para o qual $\alpha(c)$ é falsa.

- Exemplo:

Todo número primo é ímpar.

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- Prova por Indução Matemática

para provar $\forall x \alpha(x)$, quando o universo é \mathbb{N} :

- Base:

$$\alpha(0) \wedge \forall x (\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x + 1)) \models \forall x \alpha(x).$$

- Método:

a) Passo Base: provar $\alpha(0)$;

b) Passo Indutivo: provar $\forall x (\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x + 1))$.

FIM