Lista 1 de Classes de Grafos - 2016.1
Prof. Vinícius Fernandes dos Santos

1. Mostre ou dê contra-exemplo:

   (a) Se G é um grafo e $\mathcal{E}$ é cobertura por cliques mínima, isto é, com o menor número de cliques, então $\mathcal{E}$ contém todas as cliques maximais de G.

   (b) Seja G é um grafo e $\mathcal{F}$ é uma representação de G com
   $$X = \bigcup_{S_i \in \mathcal{F}} S_i.$$
   Se $|X|$ é mínimo dentre todas as representações de G, então $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{F})$ satisfaz a propriedade de Helly.

   (c) Sejam G e H grafos com conjuntos de vértices disjuntos, isto é $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Seja $G \cup H$ o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$. Então $i(G \cup H) = i(G) + i(H)$.

   (d) Se G é um grafo clique e $S \subseteq V(G)$, então $G[S]$, ou seja o subgrafo de G induzido por S, é um grafo clique.

   (e) Se G é um grafo linha e $S \subseteq V(G)$, então $G[S]$ é um grafo linha.

2. Seja K_n o grafo completo com n vértices, $K_{a,b}$ o grafo bipartido completo com a e b vértices em cada lado da partição, P_n o caminho com n vértices e C_n o ciclo com n vértices. Determine $i(G), i^*(G), L(G)$ e $K(G)$ para cada um dos grafos abaixo.

   (a) K_4
   (b) K_5
   (c) $K_{2,3}$
   (d) C_5
   (e) P_6
   (f) $K_2 \cup C_4$
   (g) $\overline{P_2 \cup P_3}$

3. Encontre uma representação em conjuntos para cada grafo da questão anterior. Sempre que possível sua representação em conjuntos deve usar menos elementos que $|E(G)|$.

4. Encontre um grafo G tal que $K(G) \neq G$ e que $K^n(G) = G$, para algum $n > 1$.

5. Escreva um algoritmo polinomial para reconhecer grafos cordais.

6. Se G é um grafo cordal desconexo com exatamente duas componentes conexas C_1 e C_2. Se $G[C_i]$ possui n_i ordens de eliminação perfeitas (OEP), determine quantas OEPs G possui.

7. Seja G um grafo cordal com pelo menos 2 vértices e seja $v_1, \ldots, v_n$ uma OEP. Mostre como construir uma outra OEP.

8. Mostre que um vértice é simplicial se e somente se ele pertence a uma única clique.

9. Mostre que um grafo $G = (V, E)$ é cordal se e somente cada subgrafo induzido possui um vértice cuja vizinhança forma uma clique.

10. Uma coloração própria é uma função $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, onde $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta $uv \in E(V)$. Dê um algoritmo para coloração própria de vértices em grafos cordais usando o menor número de cores possível, ou seja, que minimiza k.

11. O menor número k tal que existe uma coloração própria de G com k cores é o número cromático de G. Mostre que, se G é um grafo cordal, então número cromático é igual ao tamanho da maior clique.

12. Mostre que as subárvores de uma árvore satisfazem a propriedade de Helly.

13. Seja G um grafo cordal conexo e $\mathcal{T}$ uma árvore clique de G. Mostre que $\mathcal{T}$ é um subgrafo de $K(G)$. Dê exemplos de grafos G e $\mathcal{T}$ em que vale e em que não vale $\mathcal{T} = K(G)$.

14. Uma classe de grafos $\mathcal{C}$ é auto complementar se para todo $G \in \mathcal{C}$) vale que ($\overline{G} \in \mathcal{C}$). Mostre ou dê contra exemplos:

    (a) grafos bipartidos são são auto-complementares;

    (b) grafos linha são auto-complementares;

    (c) grafos clique são auto-complementares;

    (d) grafos cordais são auto-complementares;

    (e) grafos de intervalo são auto-complementares;

    (f) grafos split são auto-complementares.