Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Lista 1 de Teoria de Grafos
Prof. Vinícius Fernandes dos Santos

1. Qual o maior número de arestas que um grafo com n vértices pode ter?
2. Em um curso de pós-graduação há 10 disciplinas sendo ofertadas, e cada disciplina está sendo cursada por 10 alunos. Se cada aluno cursa 4 disciplinas, quandos alunos há no curso?
3. Um grafo é **autocomplementar** se ele é isomorfo a seu complemento.
   (a) Encontre um grafo autocomplementar com 4 vértices.
   (b) Encontre um grafo autocomplementar com 5 vértices.
   (c) É possível existir um grafo autocomplementar regular com um número par de vértices? Justifique.
4. Existe algum grafo cujos graus são 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 1?
5. Existe algum grafo cujos graus são 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 1?
6. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes:
   - G é uma árvore.
   - G é conexo e possui $n - 1$ arestas.
   - G é uma floresta e possui $n - 1$ arestas.
7. Descreva os grafos 1-regulares.
8. Descreva os grafos 2-regulares.
9. Quantos grafos orientados com n vértices existem?
10. Seja G um grafo com n vértices e c componentes conexas. Quantas arestas devem ser adicionadas a G para torná-lo conexo?
11. Seja G um grafo, cujos vértices são as casas de um tabuleiro de xadrez $n \times n$ e dois vértices são adjacentes se as casa correspondentes são vizinhas horizontalmente ou verticalmente. Mostre que G é bipartido.
12. Seja G um grafo, cujos vértices são as casas de um tabuleiro de xadrez $n \times n$ e dois vértices são adjacentes se um cavalo consegue se mover entre as casas correspondentes realizando um movimento de cavalo. Mostre que G é bipartido.
13. Desenhe todas as árvores não isomorfas com 6 vértices.
14. Desenhe um grafo bipartido com $\delta(G) = 2$, $\Delta(G) = 5$ e $n = 10$.
15. Mostre que toda árvore com grau máximo k possui pelo menos k folhas. Quais destas árvore possuem exatamente k folhas?
16. Seja G um grafo conexo e sejam P e Q dois caminhos máximos. Mostre que P e Q possuem pelo menos um vértice em comum.
17. Para cada afirmação abaixo, demonstre-a ou dê contra exemplo.
   (a) Se existe um passeio entre vértices u e v, então existe um caminho entre u e v.
   (b) Todo caminho é bipartido.
   (c) Todo ciclo é bipartido.
   (d) Todo grafo desconexo tem, pelo menos, um vértice isolado.
   (e) Se $m \geq n$ então G contém um ciclo.
   (f) Todo grafo tem um caminho de comprimento $\delta(G)$.

18. Para cada afirmação abaixo, demonstre-a ou dê contra exemplo.

    (a) Sejam G e H grafos bipartidos com o mesmo conjunto de vértices V. Então o grafo $(V, E(G) \cup E(H))$ é também bipartido.
    (b) Sejam G e H grafos completos com o mesmo conjunto de vértices V. Então o grafo $(V, E(G) \cup E(H))$ é também completo.
    (c) Sejam G e H grafos conexos com o mesmo conjunto de vértices V. Então o grafo $(V, E(G) \cup E(H))$ é também conexo.
    (d) Sejam G e H grafos autocomplementares com o mesmo conjunto de vértices V. Então o grafo $(V, E(G) \cup E(H))$ é também autocomplementar.
    (e) Sejam G e H grafos eulerianos com o mesmo conjunto de vértices V. Então o grafo $(V, E(G) \cup E(H))$ é também euleriano.
    (f) Se G é um grafo com k vértices de grau ímpar, é possível torná-lo euleriano através da remoção de $k/2$ arestas.
    (g) Se G é um grafo com k vértices de grau ímpar, é possível torná-lo euleriano através da adição de $k/2$ arestas.
    (h) Se G é um grafo com n ímpar e k vértices de grau ímpar, é possível torná-lo euleriano através da adição de $k/2$ arestas.
    (i) Se G é um grafo k-regular com k ímpar, então $|V(G)|$ é par.
    (j) Se $\delta(G) \geq n/2$ então G é conexo.
    (k) Não existe grafo conexo com todos os graus pares.
    (l) Não existe grafo conexo com todos os graus ímpares.
    (m) Todo grafo conexo possui um subgrafo próprio conexo.
    (n) O complemento de um grafo desconexo é conexo.
    (o) Todo subgrafo induzido de um grafo é também conexo.
    (p) Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.
    (q) Se G é um grafo bipartido com n vértices e m arestas, então $m \leq n^2/4$.
    (r) Toda árvore possui uma única árvore geradora.
    (s) Seja G uma floresta com c componentes conexas. Mostre que G possui $n - c$ arestas.
    (t) Seja G um grafo conexo e $e \in E(G)$ uma aresta qualquer. Então existe uma árvore geradora de G contendo e.

19. Para cada afirmação abaixo, demonstre-a ou dê contra exemplo.

    (a) Se G é um grafo bipartido k regular com bipartição (X, Y), então $|X| = |Y|$.
    (b) Se T é um grafo com $|E(T)| = |V(T)| - 1$, então T é uma árvore?
    (c) Seja G um grafo conexo com pelo menos três vértices. Se todo vértice v $d(v) \geq 2$ é um vértice de corte, então G é uma árvore.
    (d) Todo grafo cúbico conexo é inseparável.
    (e) Um bloco não pode ser uma clique.
    (f) Todo grafo conexo separável possui pelo menos dois blocos terminais.
    (g) Um grafo é bipartido se cada bloco é bipartido.