Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Lista 2 de Teoria de Grafos
Prof. Vinícius Fernandes dos Santos

1. Construa grafos com as seguintes propriedades.
   (a) 5 vértices e número cromático 5.
   (b) 7 vértices, grau máximo 3 e $\chi(G) = \omega(G) + 1$.
   (c) Qualquer quantidade de vértices e $\chi(G) = \omega(G) + 2$.
2. Seja $\beta(G)$, o número de cobertura, ou seja, o tamanho de um conjunto de cobertura por vértices mínimo, ou seja, o menor tamanho de um conjunto de vértices S tal que toda aresta de G possui ao menos um extremidade em G. Determine:
   (a) $\beta(K_n)$.
   (b) $\beta(S_n)$, onde S_n é a estrela de n vértices.
   (c) $\beta(K_{n,n})$.
   (d) $\beta(C_n)$.
3. Mostre que um conjunto de vértices S é um conjunto independente se e somente se $V(G) \setminus S$ é um conjunto de cobertura por vértices.
4. Mostre que $\chi'(K_{2r+1}) \geq \Delta(G) + 1$, para qualquer inteiro r.
5. Mostre que se $\omega(G) \leq 2$, então $\alpha'(G) = n - \chi(\bar{G})$.
6. Seja G um grafo que tem um único emparelhamento perfeito M. Mostre que:
   (a) Mostre que G não tem ciclo M-alternante.
   (b) Mostre que em todo caminho M-alternante maximal a primeira e a última aresta pertencem a M.
   (c) Mostre que se G é bipartido, então cada partição possui ao menos um vértice de grau 1.
   (d) Dê um exemplo de um grafo com um único emparelhamento perfeito sem vértice de grau 1.
7. Seja M um emparelhamento em um grafo G. Mostre que existe um emparelhamento máximo que cobre todos os vértices cobertos por M.
8. Mostre que se G é um grafo bipartido com $n \geq 2\delta(G)$, então $\alpha'(G) \geq \delta(G)$.
9. Mostre que a propriedade anterior vale, na verdade, para qualquer grafo, não apenas para os bipartidos.
10. Seja G_r o grafo com $2r$ vértices obtido a partir da remoção de um emparelhamento perfeito de $K_{r,r}$.
    (a) Quantos vértices e arestas possui G_r?
    (b) Determine $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $\alpha(G)$, $\alpha(G)$ e $\beta(G)$.
    (c) Mostre que, para qualquer inteiro k, com $2 \leq k \leq r$, existe uma ordenação de vértices tal que a coloração gulosa usa exatamente k cores.
11. Mostre que em uma coloração própria com $\chi(G)$ cores, para cada cor existe ao menos um vértice adjacente a vértices de todas as outras cores.
12. Seja G um grafo e seja $\mathcal{B}$ o conjunto de blocos de G. Mostre que $\chi(G) = max\{\chi(G[B])|B \in \mathcal{B}\}$.
13. Uma grade de dimensão $m \times n$ é um grafo cujos vértices são pares ordenados (x, y) tais que $x, y \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq m$ e $1 \leq y \leq n$. Seja G uma grade de dimensões $m \times n$. Observe que G possui mn vértices.
    (a) Quantas arestas possui G?
    (b) Determine $\alpha(G)$ e $\alpha'(G)$.
14. Mostre ou dê contraexemplo.
    (a) Todo grafo bipartido completo com um número par de vértices tem um emparelhamento perfeito.
    (b) Todo grafo completo com um número par de vértices tem um emparelhamento perfeito.

(c) Toda árvore com um número par de vértices tem um emparelhamento perfeito.

(d) Todo grafo 3-regular tem um emparelhamento perfeito.

(e) Todo grafo Euleriano com um número par de vértices tem um emparelhamento perfeito.

15. Mostre que:

    (a) $K_{3,3}$ não é planar.

    (b) Tudo subgrafo de $K_{3,3}$ é planar.

16. Para cada um dos grafos seguir, mostre que ele é planar ou que não é planar.

    (a) Um C_7 com dois vértices adicionais u e v, adjacentes a todos os vértices de C_7, mas não adjacentes entre si.

    (b) Um C_7 com dois vértices adicionais u e v, universais, ou seja, adjacentes a todos os vértices.

    (c) Um $K_6 - 2e$, ou seja, um K_6 do qual foram removidas duas arestas não adjacentes.

17. Seja G um grafo não separável com pelo menos três vértices e seja $(G_0, G_1, \ldots, G_k)$ uma decomposição em orelhas de G.

    (a) Mostre que $k = m - n$.

    (b) O que se pode afirmar sobre a relação entre k e Δ?

    (c) Se G não é planar, qual o valor mínimo de k?

18. Mostre que para todo $a \geq b \geq 2$ existe um grafo com $\chi(G) = a$, $\omega(G) = b$. Dica: use a construção de Mycielski e também a adição de vértices universais.

19. Desenhe um grafo planar com grau mínimo 5.

20. Mostre que para todo par a e b de inteiros tal que $2 \leq a \leq b$, existe um grafo com $\omega(G) = a$ e $\chi(G) = b$.