# Normas e malcondicionamento numérico

Profs. Alexandre Salles da Cunha e Ana Paula Couto

2023.2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

## Definição

Uma norma (ou norma vetorial) no $\mathbb{R}^n$ é uma função que atribui a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ uma quantidade representada por $\|x\|$, chamada norma de $x$. Esta função deve satisfazer as seguintes propriedades para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Qualquer função $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo as propriedades acima pode ser chamada de *norma*.

## Definição

As chamadas normas $p$, representadas por $\|x\|_p$, são as mais importantes normas vetoriais:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} : 1 \leq p < \infty$$

Alguns casos particulares:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$
3. $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

## Definição

A bola unitrária (de raio unitário) centrada em $x$ na norma $p$ é o conjunto:

$$\mathcal{B}_p(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_p \leq 1\}$$

- Se $A$ é SPD, definimos a norma de $x$ diante de $A$ como:

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}.$$

- Verifique que as 3 propriedades de normas são satisfeitas quando $A$ é SPD.
- Se $R$ é o fator de Cholesky de $A$, isto é, $A = R^T R$, então $\|x\|_A = \|Rx\|_2$.
- Se $A = I$, enão $\|x\|_A = \|x\|_2$.

$$y = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\|y\|_1 : |7| + |-9| + |2| = 18$

- $\|y\|_\infty : max(|7|, |-9|, |2|) = 9$

- $\|y\|_2 : \sqrt{(|7|^2 + |-9|^2 + |2|^2)} \approx 11.57$

- Dado $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\|y\|_A \approx 31.14$

- Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser representada como um vetor *nm* dimensional, de forma que qualquer norma vetorial pode ser utilizada para esta representação vetorial de $A$.
- Porém, para tratar espaços de matrizes, é conveniente o uso de outras normas chamadas *normais matriciais e normas matriciais induzidas por normas vetoriais.*

**Definição: Norma matricial**

Uma norma matricial é uma função que atribui para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a grandeza $\|A\|$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ apenas se $A$ é identicamente nula.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

# Algumas normas matriciais importantes

- $\|A\|_1 := \max_{j=1,\dots,n} \|A_j\|_1$ (norma máxima coluna)
- $\|A\|_\infty := \max_{i=1,\dots,m} \|a_i^T\|_1$ (norma máxima linha)
- $\|A\|_2 := \begin{cases} \lambda_{max}(A) & \text{se } A = A^T \\ \sigma_{max}(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} & \text{cc} \end{cases}$
- $\|A\|_F := \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (norma de Frobenius)

$A_j$ e $a_j$ são a $j-$ésima coluna e linha de $A$, respectivamente. $\lambda_{max}(A)$ é o módulo do maior autovalor em módulo de $A$, $\sigma_{max}(A)$ é o maior valor singular de $A$.

## Definição

A norma matricial de $A$ induzida pela norma vetorial $\|\cdot\|_p$, $\|A\|_p$, consiste na menor quantidade $L$ para a qual a desigualdade seguinte vale para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|Ax\|_p \leq L\|x\|_p$$

Em outras palavras, $\|A\|_p$ é o supremo de todas as razões $\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para qualquer norma vetorial, podemos escrever:

$$\|A\|_p = \max_{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

### Propriedade importante

Uma norma vetorial e sua norma matricial induzida satisfazem a propriedade

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

para qualquer $x$. Esta desigualdade é justa, no sentido de que para toda matriz $A$, existe um vetor $x$ para o qual $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$.

# Exemplo: normas matriciais induzidas por norma vetorial

```
A  =
   1.   2.
   0.   2.
--> [v,l] = spec(A'*A)
 v  =
  -0.9664996   0.2566679
   0.2566679   0.9664996
 l  =
   0.4688711   0.
   0.          8.5311289
--> sqrt(l)
 ans  =
   0.6847416   0.
   0.          2.9208096
```

- $\|A\|_1 : 4$
- $\|A\|_\infty : 3$
- $\|A\|_2 : 2.9208096$

$$Ax = b$$

- Sistemas lineares definidos por matrizes malcondicionadas: possuem número de condição alto.
- Número de condição de $A$ na norma matricial $p$

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$$

(comando `Scilab:` cond(A,p); cond(A,'inf');)

- Sistemas lineares definidos por matrizes malcondicionadas ($\kappa_p(A)$ grande) são difíceis de serem resolvidos com exatidão.
- Erros numéricos podem ser grandes na fatoração destas matrizes.

- A norma espectral é cara de ser avaliada pois requer o conhecimento do espectro de $A$ ou de $A^T A$.

$$\kappa_2(A) = \begin{cases} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} & A = A^T \\ \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} & A \neq A^T \end{cases}$$

- $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$
- Sendo $A_1, \ldots, A_n$ as colunas de $A$, para qualquer par de índices de colunas $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

**Uma estimativa para $\kappa_p(A)$**

$$\kappa_p(A) \geq \frac{\|A_i\|_p}{\|A_j\|_p}, \;\; 1 \leq p \leq \infty$$

Veja que para $i = j$, $\kappa_p(A) \geq 1$.

# Exemplo do cálculo do número de condição

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \to A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 61 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A^T A) = \{41.9737; 4.0263\} \to \kappa_2(A) = \frac{\sqrt{41.9737}}{\sqrt{4.0263}} = 3.2287$$

```
-->ATA = A'*A
 ATA  =
    5.    6.
    6.    41.
-->spec(ATA)
 ans  =
    4.026334
    41.973666
-->cond(A,2)
 ans  =
    3.2287435
-->cond(A,'inf')
 ans  =
     4.8461538
```

### $\kappa_p(A)$ fornece uma medida da sensibilidade do sistema linear

Vamos supor que $A$ seja não singular e $b \neq 0$. Há uma única solução para o sistema linear $Ax = b$. Considere o sistema perturbado $A\hat{x} = b + \delta b$, onde $\delta b \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação em $b$. Seja $\delta x = \hat{x} - x$, a diferença entre a solução do sistema perturbado e o sistema original. Gostaríamos que $\delta x$ fosse pequeno quando $\delta b$ for pequeno. Quando $\kappa_p(A)$ é pequeno isto sempre acontece. Caso contrário, pequenas perturbações em $b$ podem provocar perturbações muito grandes em $x$.

Sistema linear que deseja-se resolver: $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- $\delta b$: perturbação em $b$ - $A(x + \delta x) = (b + \delta b)$
- $\delta A$: perturbação em $A$ - $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$.
- $\delta x$: impacto na solução do sistema linear perturbado

## Pode-se mostrar que

- Perturbação apenas em $b$: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
- Perturbação apenas em $A$: $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

$\kappa(A)$ limita o tamanho da perturbação em $x$.

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

- $Ax = b$. $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
- $A(x + \delta x) = b + \delta b \rightarrow A\delta x = \delta b$ e $\delta x = A^{-1}\delta b$.
  Então $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$.
- Dividindo $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$ por $\|x\|$ para $x \neq 0$ e usando a primeira desigualdade, temos:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

e o resultado segue.

- Hilbert: $h_{ij} = 1/(i+j-1)$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

- Vandermonde, dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a matriz de $n$ colunas e linhas:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Pequena perturbação em $b$ promove grande perturbação em $x$.

## Considere a matriz $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -998 & -999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix}.$$

- $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty = 1999.$
- Logo $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = 3.992 \times 10^6$.

## Agora considere o sistema linear $Ax = b$ e a perturbação $\delta b$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \delta b = \begin{pmatrix} 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ -1 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \delta x = \begin{pmatrix} -0.998 \\ 0.999 \end{pmatrix}$
- $\|\delta b\|_1 = 1.0 \times 10^{-3}$, $\|\delta x\|_1 = 1.997$, $\frac{\|\delta x\|_1}{\|\delta b\|_1} = 1.997 \times 10^{+3}$.

1. Considere o polinômio $p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ de grau $n-1$ com coeficientes $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1}$ todos iguais a 1:

$$p(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$$

2. Vamos criar um procedimento para, dados $n$ pares distintos de pontos $(t, p(t))$, tentar recuperar estes coeficientes $a_i : i = 0, 1 \ldots n-1$.

3. Isto é, vamos criar um sistema linear cuja solução é conhecida.....e vamos tentar resolver o sistema linear.

1. Parametrizamos $t = i + 1$, para diversos valores distintos de $i$.
2. Para $t = i + 1$, $p(t)$ pode ser reescrito como:

$$p(i+1) = (i+1)^0 + (i+1) + (i+1)^2 + \cdots + (i+1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (i+1)^j$$

3. Para um dado valor de $i$, $p(i+1)$ corresponde à soma dos termos de uma **Progressão Geométrica** de $n$ termos, com o primeiro termo igual a 1 e razão $(i+1)$.

4. Logo $p(i+1) = \sum_{j=0}^{n-1} (i+1)^j = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

# Sistema linear de Vandermonde

```
function [A,b] = GeraVandermonde(n)
 for i = 1:n
    for j = 0:n-1
      A(i,j+1) = (1 + i)^j;
    end
    b(i) = ((1 + i)^n - 1)/i;
 end
endfunction

valoresn = [5;8;10;15;20]

s = size(valoresn)
printf("%d \n",s)
for i = 1:s(1)
 [A,b] = GeraVandermonde(valoresn(i))
 x = inv(A)*b
 printf("n = %d %8.7E \n",valoresn(i),norm(x,'inf'))
end
```

# Solução numérica incompatível com o resultado esperado

```
n = 5 1.0000000E+00
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 5.8931E-11
n = 8 1.0000005E+00
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 2.1406E-14
n = 10 1.0014687E+00
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 1.2095E-23
n = 15 2.5008640E+06
Warning :
matrix is close to singular or badly scaled. rcond = 1.9213E-35
n = 20 2.0767576E+18
```

```
x  =

   1.171D+18
  -2.077D+18
   7.268D+17
  -1.283D+18
   2.137D+16
  -2.749D+17
   1.773D+16
  -7.541D+15
   5.793D+14
  -1.168D+14
   2.656D+13
  -6.632D+11
   6.790D+10
  -9.882D+09
   3.985D+08
  -5549312.
   91062.
   947.1875
   53.490723
   0.8661747
```