DCC639 - ALC - Prova I

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

29 de Outubro de 2024

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas. As questões de verdadeiro e falso somente serão consideradas quando uma justificativa correta for apresentada.

Questão 01: A matriz A foi fatorada na forma $A = ZDZ^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal 4×4 com as seguintes entradas na diagonal, $a, b, 0, 0$, nesta ordem, onde $a > b > 0$. Assuma que $C(A), N(A), C(A^T), N(A^T)$ são os espaços associados à A, que z_i^T, z_i^{-T} sejam as linhas de Z, Z^{-1} respectivamente e que Z_i, Z_i^{-1} sejam as colunas de Z, Z^{-1}, respectivamente. Para todas as questões, justifique sua resposta.

1. (20%) Qual é o posto de A ?
   A fatoração revela o posto. O posto é o número de entradas não nulas (autovalores não nulos) na diagonal de D, 2.
2. (20%) Quais as dimensões dos quatro espaços fundamentais ?
   Como a matriz é 4×4 e o posto é 2, todos os espaços possuem dimensão $2 = 4 - 2$.
3. (20%) Caracterize $C(A), N(A)$ (apresente bases para).
   $C(A) = span\{Z_1, Z_2\}$ e $N(A) = span\{Z_3, Z_4\}$. A matriz é diagonalizável e os autovetores associados aos autovalores não nulos geram $C(A)$ enquanto os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ (caso exista) geram $N(A)$.
4. (20%) Caracterize o subespaço $N(A - aI)$.
   $N(A - aI)$ é o autoespaço associado ao autovetor cujo autovalor é a. Portanto, $N(A - aI) = span\{Z_1\}$.
5. (20%) E possível afirmar que $N(A) = N(D)$?
   Não é possível, pois $N(A) = span\{Z_3, Z_4\}$ enquanto que $span\{e_3, e_4\} = N(D)$.

Questão 02: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & cd \\ 0 & dc & d^2 \end{bmatrix}$, onde $a, c > 0$. Responda justificando.

1. Apresente uma fatoração de A que revele seu posto r, na forma $A = \sum_{j=1}^{r} L_j L_j^T$ onde as colunas L_j satisfazem $L_{jj} > 0$ para toda coluna $j = 1, \ldots, r$.
   Por exemplo, via Cholesky, temos: $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$, que revela o posto $r = 2$ de A. Logo $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & d \end{bmatrix}$.

2. Qual é o valor do posto r ?
   $r = 2$, veja a fatoração acima.

3. Defina bases para $C(A), C(A^T)$ e $N(A), N(A^T)$ à partir de a, c, d. A matriz A é simétrica, logo $C(A) = C(A^T) = span \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} \right\}$. Da mesma forma, $N(A) = N(A^T) = span \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} \right\}^{\perp}$. Usando este fato, encontramos uma base para $N(A)$ resolvendo o sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$. Por exemplo, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{c} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Questão 3 Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. Os autovetores de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A = ZDZ^{-1}$, similar a uma matriz diagonal D, fornecem uma base para $\mathbb{R}^n$.
   Verdadeiro, $A = ZDZ^{-1} \iff AZ = ZD$ e Z possui colunas linearmente independentes, todas elas autovetores de A, com autovalores correspondentes na diagonal de D.

2. Considere o conjunto $C = \{(x, t) : \|x\|_2 \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e a Figura 1 que ilustra o caso em que $x \in \mathbb{R}^2$. O conjunto C define um subsepaço vetorial ? Em caso positivo, apresente uma base para C.
   Falso, não é fechado à multiplicação por escalar. Tome $(\hat{x}, \hat{t}) \in C$ e $\alpha < 0$. Então $\alpha(\hat{x}, \hat{t}) = (\alpha\hat{x}, \alpha\hat{t})$. $\|\alpha\hat{x}\| = |\alpha|\|\hat{x}\| > \alpha\hat{t}$ pois $\alpha\hat{t} < 0$. Logo, $(\alpha\hat{x}, \alpha\hat{t}) \notin C$.

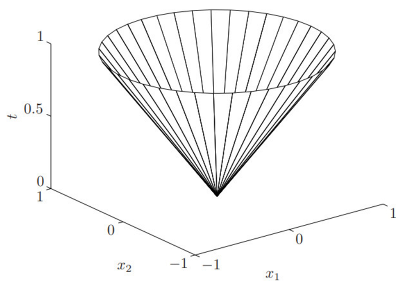

Figura 1: Ilustração do conjunto C quando $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Se $A = Q\Lambda Q^T$ onde Q é ortogonal e Λ diagonal, então $det(\Lambda) \neq 0$.
   Falso, se A singular, $det(A) = det(\Lambda) = 0$, pois Λ e A possuem pelo menos um autovalor nulo.

4. Se a fatoração $A = Q\Lambda Q^T$ da matriz quadrada de posto completo A é disponível (onde Q é ortogonal e Λ é uma matriz diagonal), a inversa de A^k é $A^{-k} = Q\Lambda^{-k}Q^T$, para algum $k \geq 1$ inteiro.
   Verdadeiro. $A^k A^{-k} = (Q\Lambda^k Q^T)(Q\Lambda^{-k}Q^T) = I$. Observe que Λ^{-k} existe pois A possui posto completo.

5. O vetor $v^T = (1, 0, -1)$ pode ser uma linha de uma matriz A e também pertencer à $N(A)$.
   Falso, pois $C(A^T) \perp N(A)$ e $v \neq 0 = C(A^T) \cap N(A)$.

Questão 04 Resolva as questões abaixo, justificando e dizendo se são verdadeiras ou falsas.

1. Se a terceira coluna de uma matriz B é um vetor de zeros, a terceira coluna de EB será um vetor de zeros, para qualquer E.
   Verdadeiro, pois a terceira coluna de EB será a soma de zero $\times$ cada coluna de E.

2. Se a terceira linha de B é toda de zeros, a terceira linha de EB pode não ser um vetor de zeros.
   Verdadeiro. A única observação que pode ser feita é que a terceria coluna de E não terá efeito no produto EB. Em particular, a terceira linha de EB pode ter elementos distintos de zero, a depender dos outros pesos em B e das outras colunas de E. Um exemplo em que isso pode ocorrer é: E é uma matriz de 1's e B uma matriz de 1's também, exceto pela sua terceira linha.

3. A matriz A foi fatorada em $A = UPV$, onde U é uma matriz que tem como colunas U_1, U_2, U_3, U_4 e V tem como linhas $v_1^T, v_2^T, v_3^T, v_4^T$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Seria possível apresentar a matriz A como uma soma de matrizes de posto 1 ? Em caso negativo, justifique. Em caso positivo, escreva a soma.

   Sim, é possível. Fazendo $A = (UP)V$ ou $A = U(PV)$ (permutando as colunas de U ou as linhas de V) temos $A = u_4 v_1^T + u_3 v_2^T + u_2 v_3^T + u_1 v_4^T$.