DCC639 - ALC - Prova I

Prof. Alexandre Salles da Cunha

15 de Abril de 2025

Instruções:

- Esta prova é individual e sem consulta. Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Todas as respostas devem ser justificadas.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01: Considere as matrizes A e $\hat{A}$: $\hat{A} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix}$, $A = P\hat{A}P^T$, onde P é uma matriz de permutação dada por $[e_3, e_2, e_1]$ e $e_i : i = 1, \ldots, 3$ é um vetor de zeros, exceto pela posição i que contém uma entrada 1. Assuma que qualquer par de valores em $\{a, b, c\}$ sejam distintos e que $0 \notin \{a, b, c\}$. Responda, sempre justificando.

1. Empregando uma fatoração LU ou de Cholesky para A ou para $\hat{A}$ (a que você entender mais apropriada), apresente uma fatoração para A que revele seu posto, e que um dos fatores tenha pelo menos duas colunas distintas das colunas de uma matriz identidade de ordem 3. Indique claramente qual é o posto.

2. É possível garantir que a matriz A admite uma fatoração do tipo $A = MM^T$, para alguma matriz M ?

3. A matriz A admite uma fatoração do tipo $A = Q\Lambda Q^T$ onde Q é ortogonal e Λ é uma matriz diagonal ?

4. $\hat{A}$ e A possuem os mesmos autovalores e autovetores ?

5. É possível estabelecer condições necessárias e suficientes sobre a, b, c de forma que A admita fatoração $A = LL^T$ onde $l_{ii} > 0, i = 1, 2, 3$? Em caso positivo, quais são elas ? Em caso negativo, justifique a impossibilidade.

Resolução da Questão 1:

Veja que $A = \begin{bmatrix} c & b & a \\ b & b & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$ e que a fatoração de LU de $\hat{A}$ deve envolver multiplicadores mais simples (apenas 1s) que a de A.

1. Faremos uma fatoração $\hat{A} = LU$ que revele o posto de $\hat{A}$ e então escrevemos que $A = (PL)(UP^T)$. Fazendo a fatoração de $\hat{A}$ temos: $\hat{A} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}$. Logo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b-a & b-a & 0 \\ c-b & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Esta fatoração revela que o posto de A é 3, pois a, b, c são distintos entre si.

2. Não. Para que valha a fatoração $A = MM^T$, temos que garantir que A seja simétrica semipositiva definida. Porém, não é possível garantir a positividade ou semi-positividade de A ou de $\hat{A}$, considerando os dados fornecidos. Por exemplo, se $a < 0$ ou se $c < 0$, ambas possuem autovalores negativos. Portanto, pode não haver M tal que $A = MM^T$.

3. Sim, tanto A quanto $\hat{A}$ são simétricas e, portanto, diagonalizáveis. Matrizes simétricas são casos particulares de matrizes normais ($AA^T = A^T A$ que é exatamente a classe de matrizes ortogonalmente similares a matrizes diagonais).

4. A e $\hat{A}$ são similares, portanto tem os mesmos autovalores. Porém, os autovetores de matrizes similares não são os mesmos. No caso em questão, $A = P\hat{A}P^T$. Se $\hat{A}x = \lambda x$, isto é, λ, x é autopar de $\hat{A}$, $(P^T AP)x = \lambda x \to APx = P\lambda x \to A(Px) = \lambda(Px)$. Portanto, Px é autovetor de A, associado ao autovalor λ.

5. A admite fatoração de Cholesky se e somente se $\hat{A}$ admitir. A matriz $\hat{A}$ deve ser positiva definida para admitir uma fatoração de Cholesky. Assumindo que este seja o caso, obtemos a fatoração de Cholesky, onde $L = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & \sqrt{b-a} & 0 \\ \sqrt{a} & \sqrt{b-a} & \sqrt{c-b} \end{bmatrix}$, o fator de Cholesky de $\hat{A}$, que só ocorre quanto $a > 0, b - a > 0, c - b > 0$.

Questão 02: A matriz A de posto incompleto foi fatorada na forma $A = QQ^T$, onde $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 < n < m$ e $Q^T Q = I_n$. Responda verdadeiro ou falso, justificando.

1. A^k para quaisquer valores de $k \geq 2$ (k inteiro) e A possuem os mesmos autovalores e autovetores.
2. A^k para quaisquer valores inteiros de $k \geq 1$ possui $\lambda = 0$ como autovalor.
3. Se (λ, x) é um autopar de A para $\lambda \neq 0$, então $x \in C(Q)$.
4. O sistema linear $Ax = b$ admite solução sempre que b for uma combinação linear dos autovetores de A.
5. $N(A - \lambda I) \subseteq C(Q)$ para qualquer autovalor λ de A.

Resolução da Questão 2:
Observação geral:

$$\begin{aligned} A^2 &= QQ^T QQ^T \\ &= A \\ A^k &= A \end{aligned}$$

1. Verdadeiro, pois $A^k = A$, uma vez que $Q^T Q = I_n$.
2. Como A tem posto incompleto (pelo enunciado), $det(A) = 0$ e pelo menos um autovalor de A ou de sua potência inteira k qualquer, é $\lambda = 0$.
3. Verdadeiro. $Ax = \lambda x \neq 0$ se $\lambda \neq 0$. Assim, x certifica que $\lambda x \in C(A)$. Logo $x \in C(A)$.
4. Falso. Por exemplo, se A é simétrica e $b(b \neq 0)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$, $b \in N(A)$. Portanto, $b = Ax \to b \in C(A) \perp N(A)$ e temos uma contradição. Veja o contra exemplo em que $b = (0, 0, 1, 0)^T \in N(A)$ é autovetor de $A = vv^T + uu^T$ onde $v^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $u^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$.
5. Falso, para $\lambda = 0$ temos $N(A - \lambda I) = N(A) \perp C(Q) = C(A)$ (posto de Q = posto de $A = n$).

Questão 3 Uma fatoração para a matriz A de posto incompleto é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$.

Responda:

1. Apresente valores admissíveis para x, y, z, a, b, c.
2. Apresente uma matriz A que atenda ao enunciado da questão.
3. Dada a escolha acima, escreva A^T como uma soma de $r = posto(A)$ matrizes de posto 1.
4. Caracterize $C(A), C(A^T), N(A), N(A^T)$, definindo claramente os elementos da base e suas dimensões.

Resolução da Questão 3:

1. Basta fazer $x = y = z = a = b = c = 0$. Esta não é a única alternativa. Qualquer resposta correta em que as grandezas x, y, z, a, b, c não são todas nulas precisa escrever $(x, y, z)^T = \alpha(1, 2, 3)^T + \beta(0, 1, 0)$ e $(a, b, c) = \gamma(1, 1, 2) + \mu(0, 1, 3)$, pois A tem claramente posto igual a superior a dois e pelo enunciado tem posto incompleto, o que a impede de ter posto 3.

2. Considerando a alternativa $x = y = z = a = b = c = 0$, temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, que revela que A possui posto incompleto igual a 2.

3. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. A fatoração revela que o posto é 2 e portanto $dim(C(A)) = dim(C(A^T)) = 2$. Consequentemente, $dim(N(A)) = dim(N(A^T)) = 3 - 2 = 1$.

   $C(A) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   $C(A^T) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

   $N(A^T) = C(A)^\perp \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to N(A^T) = span \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

   Analogamente, $N(A) = C(A^T)^\perp \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to N(A) = span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Questão 4 Responda Verdadeiro ou Falso e justifique sua resposta.

1. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se o sistema linear $Ax = e_i$ admite solução para todo $i = 1, \ldots, n$ (e_i é o vetor de zeros a menos da entrada i que é 1), então o sistema linear $A^T Ay = b$ admite solução única, mas não pode ser resolvido via Fatoração de Cholesky.

2. Dada uma matriz A qualquer, os vetores b que não pertencem a $C(A)$ formam um subespaço.

3. Se $AB = 0$, então as colunas da matriz $B \in C(A)$ e as linhas de $A \in C(B^T)$.

4. O espaço coluna da matriz $C = AB$ contém o espaço coluna de A.

5. Ao adicionarmos uma coluna b em A criando uma matriz $[A|b]$, a dimensão do espaço coluna da nova matriz aumenta quando b é linearmente dependente das demais colunas de A.

Resolução da Questão 4:

1. Falso. Se $Ax = e_i$ admite solução para todo $i = 1, \ldots, n$, $C(A) = \mathbb{R}^n$. Logo a matriz $A^T A$ é simétrica e positiva definida. Portanto, o sistema linear pode ser resolvido via fatoração de Cholesky.

2. Falso, pois o vetor zero precisa pertencer a qualquer subespaço.

3. Falso. As colunas da matriz B pertencem ao $N(A)$ e as linhas de A pertencem ao $N(B^T)$.

4. Falso. O que é verdadeiro é que o espaço coluna de C está contido no espaço coluna de A. Como contra exemplo, considere $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Falso, $dim(C([A|b])) > dim(C(A))$ apenas se $b \notin C(A)$. Caso contário, isto é, $b \in C(A)$, os subespaços são os mesmos e as dimensões são iguais.