

DCC639 - ALC - Prova I

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

18 de Abril de 2026

Instruções:

1. Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova. Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
2. A prova é composta por três questões valoradas de forma diferente, totalizando os 40 pontos distribuídos nesta avaliação.
3. Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
4. A seguinte notação é usada na prova. $N(A)$, $C(A)$ são espaços vetoriais associados a uma matriz A . e_i é um vetor de zeros exceto pela i -ésima que é 1. I é a matriz identidade de ordem especificada pelo contexto e $0_{m \times n}$ é uma matriz de zeros com m linhas e n colunas. Para formular suas respostas, considere a seguinte notação: dada uma matriz S , S_i representa a i -ésima coluna e s_i^T a sua i -ésima linha.

Questão 01: [20%] Considere a matriz A indicada e responda:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Qual o posto de A ? Justifique.

Resolução: A fatoração indicada $A = CR$ revela o rank da matriz, 2, pois é o número de linhas linearmente independentes de R e de colunas li de C .

2. Forneça bases para $C(A)$, $C(A^T)$, $N(A)$.

Resolução: As colunas de C fornecem uma base para A e as linhas de R uma base para $C(A^T)$. Uma base para $N(A)$ pode ser obtida resolvendo-se o sistema linear homogêneo $Rx = 0$. Há duas variáveis livres, x_3 e x_4 pois a dimensão de $N(A)$ é $4 - 2 = 2$. Fixando $x_3 = -1$ e $x_4 = 0$ obtemos um elemento da base como $(1, -1, -1, 0)^T$. Fixando $x_3 = 0$, $x_4 = -1$, obtemos o outro elemento da base $(-1, 1, 0, -1)^T$.

3. Os sistemas lineares $Ax = b$ e $Ax = c$ para $b = (3, 2, 1)^T$ e $c = (2, 2, 1)^T$ admitem solução única, infinitas soluções ou não admitem solução? Justifique sua resposta, conectando-a com as dimensões dos espaços fundamentais de A .

Resolução: $b \notin C(A)$ pois $b \in \mathbb{R}^3 \setminus C(A)$. Veja que as duas últimas entradas de b são a soma das duas colunas de C na fatoração e o mesmo não pode ser dito para a primeira entrada de b , que é 3. Já o sistema $Ax = c$ admite infinitas soluções, por exemplo $x = (1, 1, 0, 0)^T + v$ para qualquer $v \in N(A)$. Como $N(A) \neq \{0\}$, temos infinitas soluções.

4. Pré-multiplicar A por uma matriz de permutação altera $C(A)$ e/ou $C(A^T)$? Sim ou não e justifique sua resposta. Caso altere, apresente algum elemento na diferença entre os subespaços antes e depois da permutação.

Resolução: A permutação das linhas de A preserva $C(A^T)$ mas pode alterar $C(A)$. Por

exemplo se $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ o vetor $v = (2, 1, 0)^T \in C(A)$ e $v \notin C(PA)$.

5. Considere os projetores P_1, P_2 que projetam em $C(A), C(A^T)$ respectivamente. Então: $P_1AP_2 = ?$.

Resolução: $P_1AP_2 = A$ pois $P_1A = A$ e $AP_2 = A$, uma vez que são projetores.

Questão 02: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ e as seguintes fatorações que revelam posto:

$$A - \beta I = DV, D \in \mathbb{R}^{7 \times 5}, V \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$$

$$A - \gamma I = QW, Q \in \mathbb{R}^{7 \times 6}, W \in \mathbb{R}^{6 \times 7}$$

Sabe-se que:

$$VZ = 0_{5 \times 2}, Z \in \mathbb{R}^{7 \times 2} \text{ e } \text{posto}(Z) = 2.$$

Analogamente, $WM = 0_{6 \times 1}$, para $M \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ não nula.

$$\gamma, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > \beta > 0.$$

A dimensão de $N(A)$ é pelo menos 4.

Responda justificando.

1. β ou γ (ou ambos) é (são) autovalores de A ?

Resolução: Para que β, γ sejam autovalores de A deve existir algum $x \neq 0$ tal que $Ax = \{\beta, \gamma\}x$. Vamos mostrar que este x existe nos dois casos. Então temos o seguinte:

$$\begin{aligned} A - \beta I &= DV \\ (A - \beta I)Z &= DVZ \\ &= 0_{7 \times 2} \end{aligned}$$

$\rightarrow AZ = \beta Z$. Como as duas colunas de Z são li, Z_1, Z_2 são autovetores associados a β . Por raciocínio análogo:

$$\begin{aligned} A - \gamma I &= QW \\ (A - \gamma I)M &= QWM \\ &= 0_{7 \times 1} \end{aligned}$$

$\rightarrow AM_1 = \gamma M_1$. A coluna M_1 é não nula e fornece um autovetor associado a γ . Resposta: γ e β são autovalores de A .

2. Caso tenha respondido sim à questão anterior, caracterize os correspondentes auto-espacos de A (indicando suas multiplicidades algébrica, geométrica e bases). Caso tenha respondido não, mostre que não existe x tal que $Ax = \beta x$ ou $Ax = \gamma x$ ou ambos.

Resolução: Os autoespacos de A associados a β e γ são $N(A - \beta I), N(A - \gamma I)$. Pela resolução da questão anterior, $Z_1, Z_2 \in N(A - \beta I), M_1 \in N(A - \gamma I)$. Vamos mostrar que, na verdade, $\text{span}\{Z_1, Z_2\} = N(A - \beta I), \text{span}\{M_1\} = N(A - \gamma I)$. Isso é verdade pois foi dito que a dimensão de $N(A)$ é pelo menos 4. Sendo assim, a dimensão que resta para $C(A^T), C(A)$ é no máximo 3. Como Z_1, Z_2, M_1 são 3 li, temos $\text{span}\{Z_1, Z_2\} = N(A - \beta I), \text{span}\{M_1\} = N(A - \gamma I)$. Então as multiplicidades algébricas e geométricas de β é 2 e de γ é 1.

3. Apresente uma base para $C(A)$.

Resolução: Pela resolução da questão anterior, $C(A) = \text{span}\{Z_1, Z_2, M_1\}$, com dimensão 3, que é o posto de A .

4. Apresente um projetor ortogonal que projete em $C(A)$. Qual o posto do projetor ?

Resolução: Construa a matriz $U = [Z_1, Z_2, M_1]$ e defina $P = U(U^T U)^{-1} U^T$ e verifique que $U^2 = U$, logo U é projetor.

5. A é um projetor ?

Resolução: Não, um projetor só possui dois autovalores, 1 com multiplicidade igual à dimensão de $C(A)$ e 0, com a dimensão de $N(A^T)$. A matriz A possui três autovalores distintos: $\gamma > \beta > 0$.

Questão 03: Considere a matriz $A = \left(\begin{array}{c|c} J & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & J \end{array} \right)$ onde $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Caracterize os quatro espaços fundamentais de A .

Resolução: Claramente, $\det(A) = 2^4$, A é não singular, $N(A) = N(A^T) = \{0\}$, $C(A) = C(A^T) = \mathbb{R}^4$.

2. Apresente um projetor que projete em $N(A)$ e diga se o projetor é ortogonal ou oblíquo.

Resolução: O único projetor que projeta em $N(A)$ é a matriz 4 por 4 de zeros, e como é simétrica, é um projetor ortogonal.

3. Considere \mathcal{U} o espaço vetorial gerado pelos autovetores de A . $C(A) = \mathcal{U}$?

Resolução: A admite apenas $\lambda = 2$ como autovalor. Portanto, $\mathcal{U} = \text{span}\{e_1, e_3\}$, uma vez que o sistema linear homogêneo $(A - 2I)x = 0$ admite e_1, e_3 como soluções. Pela resolução da questão anterior, $C(A) = \mathbb{R}^4$.

4. Para um dado $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, é possível garantir que a matriz $A + sI$ seja similar a uma matriz diagonal ?

Não é possível, a matriz A possui $\lambda = 2$ como autovalor defectivo. Portanto, o autovalor de $A + Is$ é $s + 2$ é defectivo para $A + sI$. Os autovetores de A , e_1, e_3 não geram \mathbb{R}^4 . Portanto, não existe X tal que $A + sI = X\Lambda X^{-1}$, para Λ diagonal.