DCC639 - ALC - Resolução da Prova I

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

25 de Outubro de 2022

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular.
- Esta prova foi revisada diversas vezes, de forma que não há necessidade de consultar os professores para esclarecer qualquer aspecto sobre o enunciado ou sobre os dados das questões. Faz parte da avaliação ser capaz de interpretar as questões propostas.

Questão 01: [40%] Considere o sistema linear $Ax = b$ representado na forma $[A|b]$, como indicado, e responda: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 & 5 & 15 \end{array}\right]$

1. (15%) Qual é o posto de A ? Fazendo a eliminação em $[A|b]$ temos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right]$ e, na sequência, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   Portanto, a terceira linha é combinação linear das duas primeiras. O sistema linear admite solução, pois a eliminação mostrou que $b \in \mathcal{C}(A)$. **Resposta:** $r(A) = 2$.

2. (15%) Quais as dimensões dos subespaços $\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A^T), \mathcal{N}(A), \mathcal{N}(A^T)$? Em função da resposta acima, $r(A) = 2$, temos que as dimensões de $\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A^T), \mathcal{N}(A), \mathcal{N}(A^T)$ são, respectivamente, $r(A) = 2, r(A) = 2, n - r(A) = 4 - 2 = 2$ e $m - r(A) = 3 - 2 = 1$.

3. (35%) Caracterize bases $\{v_i : i = 1, \ldots, k\}$ e $\{u_i : i = 1, \ldots, k\}$ respectivamente para os subespaços $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{C}(A^T)$, tais que $A = \sum_{i=1}^{k} v_i u_i^T$, indicando o valor correto de k.

   Uma fatoração $A = CR$ é: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Assim sendo, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $u_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, $u_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, onde $k = r(A) = 2$.

4. (35%) Caso $\mathcal{N}(A) \neq 0$ (vetor de zeros), forneça uma base para $\mathcal{N}(A)$, obtida fixando as variáveis livres em -1.

   Como a matriz A possui deficência de posto, $\mathcal{N}(A) \neq 0$. A dimensão deste espaço é 2, portanto precisamos de uma base com dois elementos.

   Partimos da forma escalonada de A após a eliminação, sem naturalmente considerar a terceria linha que é combinação das duas primeiras.

   O ponto central a ser observado é que um vetor $y \in \mathcal{N}(A)$ é ortogonal a $\mathcal{C}(A^T)$.

   Logo, resolvemos o sistema linear: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$, fixando $y_3 = -1, y_4 = 0$ para um dos vetores da base e $y_3 = 0, y_4 = -1$ para o outro.

   Sistema Linear I (em y_1, y_2) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$, cuja solução é $y_2 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2}$. Logo, um vetor da base é $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

   Para a outra variável livre, $y_4 = -1$ e $y_3 = 0$, temos o sistema linear II $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$, cuja solução é é $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{7}{2}$. Portanto, o segundo vetor na base é $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Questão 02: [30%] Considere a função $b(x) = \frac{1}{\alpha e^{\beta x}}$ e um conjunto de dados a serem ajustados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, n\}$.
(No enunciado original, a função $b(x)$ foi escrita como $b(x) = \frac{1}{\alpha + e^{\beta x}}$). Esta resolução deverá ser entregue no Moodle até dia 28/10/2022, 20:00 horas, valendo 3 pontos extras. Responda:

1. No ajuste linear dos dados acima pela função $b(x)$ escolhida, é calculado um vetor de parâmetros $\hat{x}$ que minimiza a norma Euclideana do erro $r(\hat{x}) = z - A\hat{x}$, para A e z correspondentes ao ajuste. Identifique A e z em função dos dados.

2. O processo de identificar $\hat{x}$ que minimiza $r(\hat{x})$ pode ser entendido como um processo de projeção. Considerando os dados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, n\}$ disponíveis, o quê é projetado e onde é projetado ? Seja preciso em função dos dados.

3. Identifique o sistema linear que permite encontrar $\hat{x}$, isto é, defina claramente a matriz de coeficientes e o termo independente do sistema linear, em função dos dados.

Questão 03: [30%] Considere o conjunto $\mathcal{C}_1 = span\{A_1, A_2\}$ e $\mathcal{C}_2 = span\{B_1, B_2\}$ tais que $A_1^T A_2 = 0$ e $B_1^T B_2 \neq 0$ e responda:

1. Com no máximo 5 linhas de argumentação, explique em que difere projetar b em $\mathcal{C}_1$ de b em $\mathcal{C}_2$. Respostas com mais de 5 linhas não serão consideradas.
   O sistema de equações normais relativo à projeção em $\mathcal{C}_1$, $(A^T A)\hat{x} = A^T b$ é um sistema linear diagonal, enquanto que o o sistema linear $(B^T B)\hat{z} = B^T y$ não é, dado que $B_1^T B_2 \neq 0$. Em outras palavras, no caso de $\mathcal{C}_1$, podemos projetar independentemente, primeiro em A_1 e depois em A_2. O mesmo não pode ser dito em relação às colunas B_1, B_2.

2. Considerando os vetores abaixo, calcule as projeções deixando evidente a diferença que identificou na resposta acima. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$.

Projetando em $\mathcal{C}_1$:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, cuja solução é $\hat{x}_1 = 2, \hat{x}_2 = 0$. Então $p = 2A_1 = [2 \quad 0 \quad -2]^T$.

Projetando em $\mathcal{C}_2$:

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, cuja solução é $\hat{z}_1 = 0, \hat{z}_2 = 2$. Então $p = 2B_2 = [2 \quad 2 \quad -2]^T$.