DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

05 de Dezembro de 2024

Nome do aluno:

Instruções:

- Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados.
- Você pode escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

⇒ Atenção: A sua resposta deve estar contida no espaço delimitado para cada questão, devendo ser autocontida para entendimento da resolução. A folha de rascunho/almaço que você recebe não será entregue e não será corrigida.

Questão 01: A matriz R na fatoração $AP = QR$ completa da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$ de posto $r = 2$ é apresentada abaixo. Sabe-se que $Q = [\overline{Q}, \hat{Q}]$, onde $\overline{Q} = [q_1, q_2] \in \mathbb{R}^{5\times2}$, $\hat{Q} = [q_3, q_4, q_5] \in \mathbb{R}^{5\times3}$, $Q^TQ = I_5$, $pivot = (3, 2, 1, 5, 4)^T$.

```
R  =
   19.33908  -16.598515  -9.1214269  -2.6268055  -2.7638337
   0.          5.5217121   1.1043424   0.5521712   0.2760856
   0.          0.          7.238D-16   2.469D-16  -2.959D-16
   0.          0.          0.         -2.555D-17   2.555D-17
   0.          0.          0.          0.          1.253D-16
```

Responda às questões abaixo, apresentando sua justificativa.

Observações gerais sobre o enunciado e os dados da questão: A fatoração $AP = QR$ completa fornece nas primeiras $r = posto(A) = 2$ colunas de Q uma base para $C(A) = C(AP)$ e em suas últimas $m - posto(A)$ colunas uma base para $C(A)^\perp = N(A^T)$. Portanto $\overline{QQ}^T$ é um projetor que projeta em $C(A)$ e seu projetor complemento ortogonal $(I - \overline{QQ}^T)$ projeta $N(A^T) = C(A)^\perp$. Resumindo: $\hat{Q}\hat{Q}^T$ projeta em $span\{q_3, q_4, q_5\} = N(A^T)$.
$\overline{QQ}^T$ projeta em $C(AP) = C(A) = span\{q_1, q_2\}$.

1. Se $b = 2q_1 + q_4$, $\|(I - \overline{QQ}^T)b\|_2^2$=?
   Pelo explicado acima, $q_1 \perp span\{q_3, q_4, q_5\}$. Logo:

$$\begin{aligned}\hat{Q}\hat{Q}^T b &= \\ &= \hat{Q}\hat{Q}^T(2q_1 + q_4) \\ &= 2\hat{Q}(\hat{Q}^T q_1) + \hat{Q}\hat{Q}^T q_4 \\ &= 0_5 + q_4 \\ \|q_4\| &= 1\end{aligned}$$

2. $\hat{Q}\hat{Q}^T q_3 =$?
   Como mencionamos acima $\hat{Q}\hat{Q}^T$ projeta no $C(A)^\perp = N(A^T)$. E como q_3 é um dos elementos da base de $N(A^T)$, $\hat{Q}\hat{Q}^T q_3 = q_3$.

3. $\hat{Q}\hat{Q}^T q_1 =?$
   q_1 é ortogonal ao espaço onde $\hat{Q}\hat{Q}^T$ projeta, logo $\hat{Q}\hat{Q}^T q_1 = 0_5$.

4. Se $v = A_3 + A_2$, $\|v\|_2^2$=?

$$\begin{aligned} v &= A_3 + A_2 \\ &= (r_{11}q_1) + (r_{12}q_1 + r_{22}q_2) \\ &= (r_{11} + r_{12})q_1 + r_{22}q_2 \end{aligned}$$

   Como $q_1 \perp q_2$ e ambos têm norma Euclideana unitária, temos $\|v\|_2^2 = (r_{11} + r_{12})^2 + r_{22}^2$ (não é necessário ir além disso e realizar os cálculos). Mas, fazendo-os temos: $\|v\|_2^2 = (19.33908 - 16.598515) + 5.5217121 \approx 38.0$.

5. $q_2 q_2^T A_5 =?$

$$\begin{aligned} A_5 &= r_{14}q_1 + r_{24}q_2 \\ q_1 &\perp q_2 \\ q_2 q_2^T A_5 &= q_2 q_2^T (r_{14}q_1 + r_{24}q_2) \\ &= r_{24}q_2(q_2^T q_2) \\ &= 0.5521712 q_2 \end{aligned}$$

6. Qual o posto de $I - \hat{Q}\hat{Q}^T$?
   $I - \hat{Q}\hat{Q}^T = \overline{QQ}$ projetor que projeta em $C(A)$ que tem dimensão $= 2$. Logo posto de $I - \hat{Q}\hat{Q}^T$ é 2.

7. $(I - \overline{QQ}^T)(\hat{Q}\hat{Q}^T)$ é um projetor ? Em caso positivo, é ortogonal, qual seu posto e onde projeta ?

$$\begin{aligned} (I - \overline{QQ}^T)(\hat{Q}\hat{Q}^T) &= \hat{Q}(\hat{Q}^T\hat{Q})\hat{Q}^T \\ &= \hat{Q}\hat{Q}^T \end{aligned}$$

   Observe que demonstramos acima a idempotência de $\hat{Q}\hat{Q}^T$. Portanto, é projetor, que projeta

   em $N(A^T)$, é ortogonal pois $\hat{Q}\hat{Q}^T$ é simétrica e seu posto é 3, a dimensão de $N(A^T)$.

8. $span\{q_3, q_4, q_5\} = C(A)$?
   Falso $span\{q_3, q_4, q_5\} = C(A)^{\perp} = N(A^T)$.

Questão 02 Considere o algoritmo abaixo e assuma que A é uma matriz $m \times n, m \geq n$. Em qualquer iteração do algoritmo, assuma que A_k é a $k-$ésima coluna de A atualizada.

- Para $j = 1, \ldots, n$, faça a atualização da matriz A segundo:

$$A \leftarrow A \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{\|A_j\|_2} & \frac{-A_j^T A_{j+1}}{\|A_j\|_2^2} & \cdots & \frac{-A_j^T A_n}{\|A_j\|_2^2} \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. O que o algoritmo faz, assumindo que sua execução seja bem sucedida ?
   O algoritmo ortogonaliza a matriz A fazendo n transformações lineares triangulares superiores, no espírito do algoritmo Gram-Schmidt (GS) revisado. Ou seja, a cada iteração j, normaliza o vetor armazenado em A_j e desconta das demais colunas de A (atualizada, não a matriz A original que é substituída por sua ortogonalização) a projeção destas colunas no $span\{A_j\}$. Veja que na diagonal da matriz triangular superior que multiplica a matriz A atualizada a cada iteração j temos a entrada $\frac{1}{\|A_j\|}$ que corresponde ao inverso da entrada r_{jj} de R na fatoração QR via GS. Já a entrada na coluna k da linha j da matriz triangular superior corresponde a $\frac{-A_j^T A_k}{\|A_j\|_2^2}$. Na iteração j, a coluna $A_k : k \geq j+1$ armazena a coluna k inicial em A (antes da ortogonalização) descontada de todas as projeções em $q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}$. Então, o termo $\frac{-A_j^T A_k}{\|A_j\|_2^2}$ só faz descontar da coluna A_k a sua projeção em $q_j = \frac{A_j}{\|A_j\|}$ na iteração j do algoritmo dado. Veja que $\frac{-A_j^T A_k}{\|A_j\|_2^2} A_j$ equivale a $\frac{-A_j^T A_k}{r_{jj}} \frac{A_j}{r_{jj}} = -(q_j^T A_k) q_j$ que é a parcela de A_k original da matriz A relativa a $span\{q_j\}$.

2. O algoritmo acima possui alguma condição de falha ? Em caso positivo, o que esta condição de falha caracteriza ? O algoritmo possui alguma restrição de uso ?
   Sim, não é capaz de lidar com deficiência de posto, pois quando r_{jj} for muito pequeno, comparado às demais entradas em R, temos a indicação de dependência linear. Este problema é resolvido incorporando pivoteamento de colunas.

3. Este algoritmo se assemelha a algum algoritmo visto durante o curso ? Em caso positivo, qual algoritmo ? Caracterize estas semelhanças.
   A menos do armazenamento das entradas do fator R que não é explicitado, o algoritmo acima é Gram-Schmidt revisado. Semelhanças:

   - Normalização de A_j a cada iteração.
   - Desconta das demais colunas de A, de índice $j+1, \ldots, n$ (atualizada, não a matriz A original que é substituída por sua ortogonalização) a projeção destas colunas no $span\{A_j\}$ que acabou de produzir a coluna q_j na fatoração.

Questão 03: Considere o problema de mínimos quadrados (PMQ) $\min_x \|QRx - b\|_2^2$, sabendo que $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, Q^T Q = I_n$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma triangular superior, satisfazendo $r_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

1. Há solução para o PMQ ? Em caso positivo, apresente a solução e discuta sua unicidade.

   A matriz A possui posto n, completo, pois sua fatoração $A = QR$ é tal que todos os elementos na diagonal de R são não nulos. Sabemos que nesse caso, o sistema equações normais admite solução única. Vamos mostrar isso. Buscar um x que minimize $\min_x \|QRx - b\|_2^2$ equivale a buscar um y que minimize $\min_y \|Qy - b\|_2^2$, definindo-se $y = Rx$. Recorde-se que $C(Q) = C(A)$. Então, o sistema de equações normais em y pode ser escrito como $Q^T Q y = Q^T b$ cuja solução é $y = Q^T b$. Portanto, $Rx = y = Q^T b$ e $x = R^{-1} Q^T b$ é a solução única de PMQ, pois R admite inversa.

2. Assuma agora que $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ onde $N(Q^T) = \{0_m\}$ e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, satisfazendo $r_{11} \geq r_{22} \geq \cdots r_{mm} > 0$. O PMQ admite solução ? Em caso positivo, qual é a solução ? Obtenha uma expressão para $\|QRx - b\|_2^2$ neste caso.
   Nesse caso, $C(Q) = \mathbb{R}^m$, a matriz $A : m \times m$ possui posto completo m. Portanto, qualquer $b \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear das colunas de A ou de Q, respectivamente com pesos x ou y adequados. Logo, $\|QRx - b\|_2^2 = 0$ e a solução do PMQ é, na verdade, a solução única do sistema linear $QRx = b$, $x = R^{-1} Q^T b$.

Questão 04: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. Uma matriz é perfeitamente condicionada quando seu número de condição, para alguma norma matricial induzida qualquer, é inferior à unidade.
   Falso. O número de condição de uma matriz nunca é inferior à unidade, que é o número de condição de uma matriz identidade ou de uma indentidade por um escalar.

2. Para uma matriz P ser uma matriz de projeção ortogonal, a única condição é $P = P^T$.
   Falso, um projetor precisa ser idempotente, isto é, satisfazer $P = P^2$. Para ser ortogonal, é necessário ser uma matriz simétrica.

3. A matriz $P = Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} Q^T$ para $Q^TQ = I$ é um projetor ortogonal.
   Falso, depende dos valores de a, b que, como sabemos são os autovalores de P (por similaridade). Sabemos que um projetor possui autovalores 1 ou 0. Veja o desenvolvimento a seguir, que complementa a resposta dada até agora. Sendo q_1, q_2 as duas colunas ortonormais de Q, temos que $P = aq_1q_1^T + cq_2q_2^T$. Como $q_1 \perp q_2$, $P^2 = a^2q_1q_1^T + c^2q_2q_2^T$. Portanto, para que seja projetor ($P^2 = P$) $a, c \in \{0, 1\}$.

4. Se $Q_AR_A = A^TP_A$ e $Q_BR_B = B^TP_B$ são fatorações QR reduzidas, P_A, P_B são matrizes de permutação e $C(A^T) \subseteq C(B^T)$ então $Q_AQ_A^TQ_BQ_B^T = Q_AQ_A^T$.
   Resolução: Afirmativa verdadeira. Vamos assumir que o posto de A^T é r e de B^T é $r+1$ para que $C(A^T) \subset C(B^T)$, $C(B^T) \neq C(A^T)$, ou seja, para que haja o pertencimento estrito. Podemos assumir que as r primeiras colunas de B^T gerem o mesmo espaço das primeiras r colunas de A^T e que A^T possua exatamente r colunas. Assim sendo, vamos assumir que $Q_A = [q_1, \dots, q_r]$ e $Q_B[q_1, \dots, q_r, q_{r+1}]$, com $q_{r+1} \perp span\{q_1, \dots, q_r\}$. Então temos:

$$
\begin{aligned}
Q_AQ_A^TQ_BQ_B^T &= (\sum_{i=1}^{r} q_iq_i^T)(\sum_{j=1}^{r+1} q_jq_j^T) \\
&= (\sum_{i=1}^{r} q_iq_i^T)(\sum_{i=1}^{r} q_jq_j^T + q_{r+1}q_{r+1}^T) \\
&= (\sum_{i=1}^{r} q_jq_j^T)(\sum_{i=1}^{r} q_jq_j^T) + (\sum_{i=1}^{r} q_jq_j^T)(q_{r+1}q_{r+1}^T) \\
&= Q_AQ_A^T + \sum_{i=1}^{r}(q_iq_i^Tq_{r+1}q_{r+1}^T) \\
&= Q_AQ_A^T + \sum_{i=1}^{r} q_i(q_i^Tq_{r+1})q_{r+1}^T \\
&= Q_AQ_A^T
\end{aligned}
$$