DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha

20 de Maio de 2025

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja através do telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas. Todas as respostas devem ser justificadas.

Questão 1: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. M_1, M_2 são projetores ortogonais de mesma ordem. $M = M_1 + M_2$ é projetor ortogonal ? Em caso positivo, estabeleça condições necessárias e suficientes. Em caso negativo, justifique.

   Resposta: Falso. $M = M_1 + M_2$ é projetor se e somente se $M^2 = M$. Isso não é observado no caso geral. Veja:

   $$\begin{aligned}(M_1 + M_2)(M_1 + M_2) &= M_1^2 + M_1M_2 + M_2M_1 + M_2^2 \\ &= M_1 + M_2 + M_1M_2 + M_2M_1\end{aligned}$$

   Portanto, para que seja projetor, é necessário que $M_1M_2 + M_2M_1 = 0$ (uma matriz de zeros). Como M_2, M_1 são simétricas, a condição $M_1M_2 + M_2M_1 = 0$ implica que $C(M_1) \perp C(M_2)$ e esta condição não é sempre satisfeita entre dois projetores ortogonais. Portanto, a resposta é falsa.

2. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto $r < min\{m, n\}$ foi fatorada $AP = QR$ onde Q possui r colunas ortonormais e P é uma matriz de permutação. Sabe-se que o sistema linear $Ax = b$ admite solução. Então $\|QQ^Tb - b\|_2 \neq 0$.

   Resposta: Falsa. Como Q possui r colunas ortonormais, a fatoração QR dada é reduzida, foi obtida via permutação de colunas e fornece $C(A) = C(Q)$. Assim sendo, QQ^T é o projetor que projeta em $C(AP) = C(A) = C(Q)$. Portanto, se $Ax = b$, $b \in C(A)$, $QQ^Tb = b, \|QQ^Tb - b\|_2 = 0$.

3. É possível haver duas matrizes simétricas distintas $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com os quatro espaços fundamentais idênticos e satisfazendo $A^2 \neq A, P^2 = P$. Em caso positivo, ilustre com um exemplo.

   Resposta: Verdadeiro.
   É possível. Faça $P = I$ e $A = \alpha I$, para $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. Veja que $A^2 = \alpha^2 I \neq A$.

4. Seja E uma matriz $m \times m$, com $Ex = \frac{x+Fx}{2}$ onde F é uma matriz $m \times m$ que transforma $[x_1, \cdots, x_m]$ em $[x_m, \cdots, x_1]$. Então a matriz E é um projetor ortogonal.

   Resposta: Verdadeiro.
   $Ex = \frac{x+Fx}{2} \rightarrow E = \frac{1}{2}(I+F)$. Pelo enunciado temos que $F = [e_m, e_{m-1}, \ldots, e_1]$, ou seja, F inverte as coordenadas de x. Portanto, $F^2 = I$.

   E é projetor se e somente se $E^2 = E$.

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{4}(I+F)^2 \\ &= \frac{1}{4}(I^2 + 2F + F^2) \\ &= \frac{1}{4}(2I + 2F) \\ &= \frac{1}{2}(I+F) \\ &= E \end{aligned}$$

   Portanto, é projetor e é projetor ortogonal pois E é simétrica.

Questão 2: A fatoração $A = QR$ de A com posto completo foi realizada com o algoritmo Gram-Schmidt Clássico e Revisado, cujas implementações são dadas ou pelo `Algoritmo_X` ou pelo `Algortimo_Y` abaixo. Um algoritmo produziu a fatoração $A = Q_1R_1$ e o outro $A = Q_2R_2$.

```
function [M3,M4] = Algoritmo_X(C)
   [m,n] = size(C)
   M3 = zeros(n,n)
   M4 = zeros(m,n)
   u = C
   for i = 1:n
       M3(i,i) = norm(u(:,i),2)
       M4(:,i) = u(:,i)/M3(i,i)
       for j = (i+1):n
           M3(i,j) = M4(:,i)'*u(:,j)
           u(:,j) = u(:,j) - M3(i,j)*M4(:,i)
       end
   end
endfunction
```

```
function [M1,M2] = Algoritmo_Y(B)
   [m,n] = size(B)
   M1 = zeros(n,n)
   M2 = zeros(m,n)
   for j = 1:n
       u = B(:,j)
       for i = 1:j-1
           M1(i,j) = M2(:,i)'*B(:,j)
           u = u - M1(i,j)*M2(:,i)
       end
       M1(j,j) = norm(u,2)
       M2(:,j) = 1.0/M1(j,j) * u
   end
endfunction
```

```
->I - Q1'*Q1 =
   2.220D-16  -1.684D-15   8.465D-15  -1.776D-14   2.456D-14  -5.704D-14   3.501D-13  -3.353D-12
  -1.684D-15   3.331D-16   4.229D-14  -1.927D-13   4.883D-13  -1.205D-12   3.579D-12  -1.321D-11
   8.465D-15   4.229D-14  -2.220D-16  -1.365D-12   5.832D-12  -1.907D-11   7.025D-11  -2.946D-10
  -1.776D-14  -1.927D-13  -1.365D-12  -2.220D-16   3.156D-11  -1.758D-10   9.279D-10  -5.236D-09
   2.456D-14   4.883D-13   5.832D-12   3.156D-11  -2.220D-16  -8.876D-10   8.682D-09  -7.301D-08
  -5.704D-14  -1.205D-12  -1.907D-11  -1.758D-10  -8.876D-10   1.110D-16   6.525D-08  -0.000001
   3.501D-13   3.579D-12   7.025D-11   9.279D-10   8.682D-09   6.525D-08   0.          -0.0000158
  -3.353D-12  -1.321D-11  -2.946D-10  -5.236D-09  -7.301D-08  -0.000001   -0.0000158   2.220D-16
->I - Q2'*Q2 =
   2.220D-16  -1.684D-15   8.573D-15  -1.825D-14   2.578D-14  -5.877D-14   3.377D-13  -3.104D-12
  -1.684D-15   3.331D-16  -1.056D-15  -3.059D-15   1.772D-14  -4.495D-14   4.812D-14   5.608D-13
   8.573D-15  -1.056D-15   0.           1.161D-15  -1.218D-14   6.834D-14  -3.853D-13   2.262D-12
  -1.825D-14  -3.059D-15   1.161D-15   2.220D-16  -2.949D-16   9.714D-16  -1.263D-15  -6.466D-14
   2.578D-14   1.772D-14  -1.218D-14  -2.949D-16   2.220D-16  -3.886D-16   4.330D-15  -1.427D-14
  -5.877D-14  -4.495D-14   6.834D-14   9.714D-16  -3.886D-16   0.          -8.327D-16   1.746D-14
   3.377D-13   4.812D-14  -3.853D-13  -1.263D-15   4.330D-15  -8.327D-16  -2.220D-16   3.803D-15
  -3.104D-12   5.608D-13   2.262D-12  -6.466D-14  -1.427D-14   1.746D-14   3.803D-15  -2.220D-16
```

Considerando os algoritmos e resultados numéricos obtidos acima, responda:

1. Dentre as matrizes $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ há alguma que corresponda a Q_1, Q_2 ?

   Resposta: Sim. $Q_2 = M_4$ e $Q_1 = M_2$.

   O algoritmo X implementa Gram-Schmidt revisado pois em cada iteração i (ortogonalização de uma coluna) faz uma projeção de posto 1 nas colunas de u de índice $i+1$ até n. Ao final restorna a matriz M_4 que armazena a Q na fatoração. Já o algoritmo Y implementa Gram-Schmidt clássico pois a cada iteração j faz uma projeção de posto $j-1$ na coluna j de A armazenada no vetor u. Ao final retorma a matriz M_2 que retorna a sua Q na fatoração. Já os resultados numéricos de $I - Q_1^TQ_1$ e $I - Q_2^TQ_2$ mostram que a matriz Q_1 possui colunas menos ortogonais que as colunas de Q_2, uma vez que suas entradas possuem magnitudes maiores, várias ordens de grandeza superiores à precisão da máquina, 10^{-16}.

Portanto, a matriz Q_1 corresponde à matriz retornada pelo algoritmo Clássico, $Q_1 = M_2$ e Q_2 corresponde à matriz Q retornada pelo algoritmo Revisado, $Q_2 = M_4$.

2. Existe alguma diferença notável entre o perfil de perda de ortogonalidade entre as colunas de Q produzidas pelos dois algoritmos, X ou Y ? Justifique.

   Resposta: Sim, existe.

   O resultado numérico apresentado para $I - Q_1^T Q_1$ e $I - Q_2^T Q_2$ indica exatamente a perda de ortogonalidade. Enquanto no algoritmo revisado as entradas de $I - Q_2^T Q_2$ são mais homogêneas e menores, para o algoritmo clássico, as entradas da matriz $I - Q_1^T Q_1$ apresentam valores maiores e erros maiores associados às colunas de maiores índices, isto é, no canto inferior direito da matriz $I - Q_1^T Q_1$.

3. A menos de erros numéricos, seria possível construir um projetor ortogonal a partir daquilo que cada um dos dois algoritmos retorna (M_1, M_2, M_3, M_4)? Em caso positivo, diga como e seja P_1, P_2 os projetores obtidos por meio da saída dos algoritmos 1 e 2. Explicite os projetores, indicando seu posto e seu espaço coluna.

   Resposta: Sim, seria possível. $P_1 = M_2 M_2^T = Q_1 Q_1^T$ e $P_2 = M_4 M_4^T = Q_2 Q_2^T$ são projetores ortogonais que projetam em $C(A)$. Possuem posto igual ao posto de A.

4. Diferencie os algoritmos X e Y em relação ao processo de ortogonalização, diferenciando o posto do projetor empregado em cada momento em que ocorre alguma etapa de projeção em cada um deles. Identifique claramente a partir da indexação dos algoritmos.

   Resposta: O algoritmo X (revisado) faz $n-(i+1)$ projeções de posto 1 logo após computar a coluna q_i de Q. O conteudo em u, que armazena $A_j - \sum_{k=1}^{i-1} q_k q_k^T A_j$ para $j \geq i+1$, é submetido a estas projeções. Já o algoritmo Y (Clássico) faz uma projeção de posto $i-1$, na coluna A_i, tão logo as colunas $q_1, \ldots, q_{i-1}$ tenham sido computadas. Ou seja, preserva a coluna A_i intacta até o momento da projeção de posto $i-1$. Esta segunda opção, a clássica, produz resultados numéricos piores.

5. Qual algoritmo X ou Y é mais apropriado para a introdução de pivoteamento de colunas ?

   Resposta: O algoritmo X que implementa Gram-Schmidt revisado é mais apropriado, pois a cada iteração j, temos a indicação do erro de projeção, que indica o quão linearmente independentes as colunas de A que não foram ortogonalizadas são das colunas de Q já computadas. No algoritmo Y que implementa o Gram-Schmidt clássico esta informação não está disponível, pois a projeção é feita em um único passo.

Questão 3: O Problema de Mínimos Quadrados $\min \|Ax - b\|_2$ deve ser resolvido para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para se ajustar a função $g(z) = a + bz + c\log_{10}(z)$ aos dados $\{(z_i, y_i) : i = 1, \ldots, m\}$. Sabe-se que as abscissas z_i são: $1, 10, 0.1, 0.01, 10000$, nesta ordem. Responda:

1. Qual é a matriz A ?

   Resposta: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \log_{10}(1) \\ 1 & 10 & \log_{10}(10) \\ 1 & 0.1 & \log_{10}(0.1) \\ 1 & 0.01 & \log_{10}(0.01) \\ 1 & 10000 & \log_{10}(10000) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0.1 & -1 \\ 1 & 0.01 & -2 \\ 1 & 10000 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Sabendo que os valores singulares de A são $\{l_i : i = 1, 2, 3\}$ que satisfazem $l_1 > l_2 > l_3 > 0$ qual é o valor de $\kappa_2(A^T A)$?

   Resposta: A matriz A é não simétrica, portanto $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$ e $\lambda_i(A^T A) = \sigma_i(A)^2$. Portanto $\kappa_2(A^T A) = \frac{l_1^2}{l_3^2}$.

3. Discuta a existência e unicidade de soluções do Sistema de Equações Normais.

   Resposta: O sistema de equações normais $A^T Ax = A^T y$ é definido por uma matriz de coeficientes $A^T A$ de posto completo, pois A possui posto completo, posto(A) = 3. Portanto, a solução x do sistema existe e é única: $A^T y \in C(A^T A)$, $N(A^T A) = \{0\}$.

4. Como a fatoração QR de A pode ser empregada para resolvê-lo ? Há alguma vantagem em assim procedermos ?

   Resposta: Pode e deve ser usada pois é uma fatoração mais estável que a alternativa mais barata, fatoração de Cholesky de A^TA. Basta resolver o sistema via $Rx = Q^Tb$.

   No desenvolvimento abaixo, observe que usamos $Q^{-1} = Q^T$ e que podemos multiplicar por R^{-T}, pois R^T é quadrada e não singular, uma vez que A possui posto completo.

$$\begin{aligned} A^TAx &= A^Tb \\ R^TQ^TQRx &= R^TQ^Tb \\ R^TRx &= R^TQ^Tb \\ Rx &= Q^Tb \end{aligned}$$

5. Considere que z_5 foi substituído por $z_3 = 0.1$ (e y_5 por y_3). Quais as dificuldades em usar QR clássico resolver o sistema de equações normais ?

   Resposta: Mesmo com a substituição, neste caso A continua com posto completo. Assim, as dificuldades de se usar o algoritmo Clássico para a fatoração são as mesmas caso a substituição não tivesse sido feita. As dificuldades são que a matriz Q retornada pelo algoritmo clássico não é tão precisa quanto a produzida por outras implementações da fatoração QR.

Questão 4: Considere o conjunto $Y = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\}$, os pontos $z = (1,2,4)^T$ e $x^0 = (1,1,1)^T \in Y$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = (2,3)^T$.

Responda:

1. (10%) Y é um subespaço vetorial ? Justifique.

   Resposta: Não é subespaço vetorial, pois $0_3 \notin Y$.

2. (25%) O problema de projetar um ponto qualquer em Y equivale a um problema de projeção em subespaço vetorial ? Em caso positivo, indique claramente em qual espaço vetorial e a equivalência da problema. Em caso negativo, apresente uma justificativa.

   Resposta: O conjunto Y pode ser reescrito como

$$Y = x^0 + span\{v_1, \ldots, v_d\}$$

   onde $x^0 \in Y$ (foi dado) e $span\{v_1, \ldots, v_d\} = N(A)$. No caso em questão, considerando a matriz A dada e sua fatoração, temos que $d = dim(N(A)) = 1$ e $v = (2/3, 2, -1)^T$ fornece uma base para $N(A)$.

   Esta é uma propriedade de qualquer conjunto afim Y, que é uma translação de um subespaço vetorial, uma translação de $N(A)$ onde A é a matriz que define Y. Então, projetar um ponto z qualquer em Y corresponde a projetar $z - x^0$ em $N(A)$. Isso será elaborado em detalhes ainda maiores na próxima questão.

3. (40%) Qual é o ponto u de Y de mínima distância Euclideana de z ?

   Resposta: Primeiro observe que $z \notin Y$. Assim sua projeção u em Y é diferente de z.
   O ponto u resolve

$$\min_{u \in Y} \|z - u\|_2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|z - (x^0 + \alpha v)\|_2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|(z - x^0) - \alpha v)\|_2.$$

   Para este último, resolvedo o sistema de Equações Normais temos: $v^Tv\alpha = v^T(z - x^0)$. $v^Tv = 49/9, z - x^0 = (0,1,3)^T, v^T(z - x^0) = -1 \to \alpha = -9/49$. Logo $u = x^0 + \alpha v = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 43 \\ 31 \\ 58 \end{bmatrix}$.

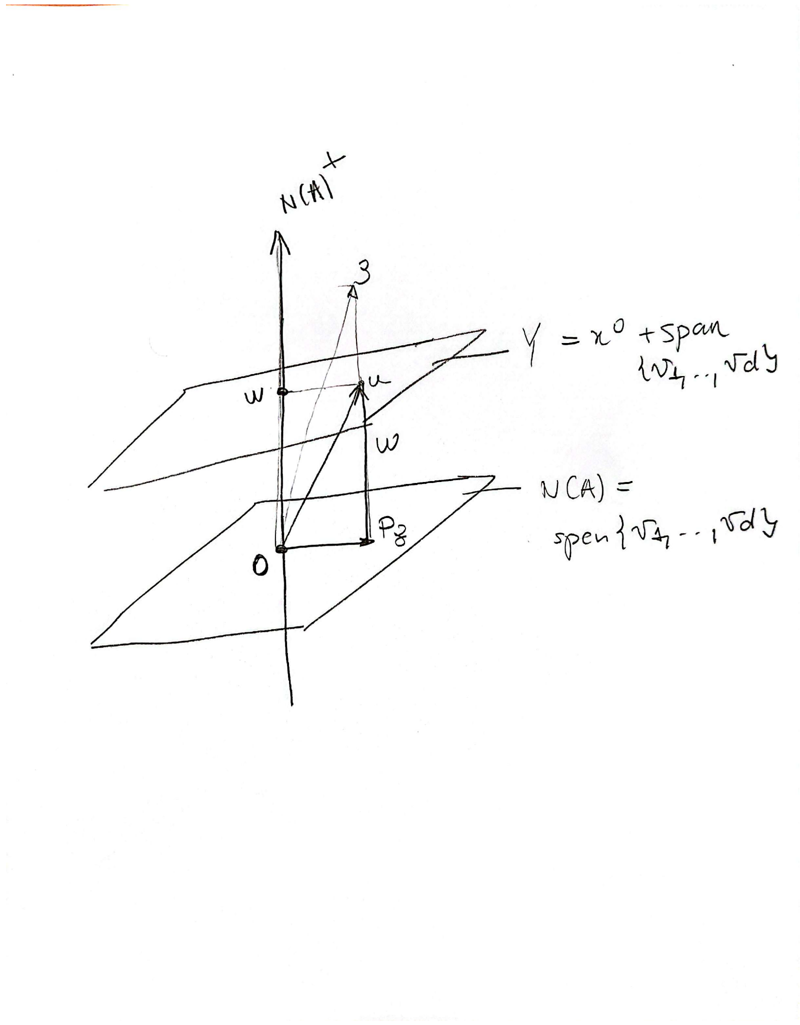

Figura 1: $u = w + Pz$

4. (25%) Seria possível escrever o ponto u como $u = w + Pz$ onde P é um projetor ortogonal e w é um vetor convenientemente escolhido ? Em caso negativo justifique. Em caso positivo, apresente as propriedades que devem satisfeitas por w e P. Para este último indique seu posto e seu espaço coluna.

Resposta: Sim, seria. Bastaria que P projete em $N(A)$ (logo $C(P) = N(A)$) e $w \in N(A)^{\perp} \cap Y$. A título de diferenciação entre o pedido na questão logo acima e o que pedido aqui, quando na questão acima escrevemos $u = x^0 + \alpha v$, o termo αv não é (necessariamente) a projeção de z em $N(A)$ tanto quanto não temos necessariamente que $x^0 \in N(A)^{\perp}$. Mas como x^0 pode ser qualquer ponto em Y, podemos escolher $x^0 = w \in N(A)^{\perp} \cap Y$, $u = w + Pz$ para um projetor P que projeta em $N(A)$. Esta forma de escrever u resulta naturalmente das duas escolhas. Podemos fazer isso pois $\mathbb{R}^n$ é a soma direta de $N(A)$ e de seu complemento ortogonal. Veja a Figura 1 que ilustra a projeção em $N(A)$ e em Y.