DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

11 de Outubro de 2025

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova. Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Todas as respostas devem ser justificadas.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- A seguinte notação é usada na prova. $N(A), C(A)$ são espaços vetoriais associados a uma matriz A. e_i é um vetor de zeros exceto pela $i-$ésima que é 1.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01: Considere as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n\times k}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, ambas de posto k. Defina $M = A(B^TA)^{-1}B^T$. Responda justificando.

1. (10%) Mostre que M é projetor.
   Um projetor é uma matriz idempotente: $M^2 = M$, propriedade que deve ser verificada:
$$\begin{aligned} M^2 &= A(B^TA)^{-1}B^TA(B^TA)^{-1}B^T \\ &= A(B^TA)^{-1}(B^TA(B^TA)^{-1})B^T \\ &= A(B^TA)^{-1}B^T \\ &= M \end{aligned}$$

2. (15%) Caracterize o espaço no qual M projeta, indicando uma base para o mesmo e sua dimensão.
   Veja que $Mz = A(B^TA)^{-1}B^Tz = Aw$, onde w certifica que $Mz \in C(A)$. Como M é projetor, M projeta em $C(A)$. A base de $C(A)$ é dada pelas colunas $A_1, A_2, \dots, A_k$ de A, todas linearmente independentes, pois foi informado que A possui posto completo $= k$. A dimensão de $C(A)$ é, portanto, k.

3. (25%) Caracterize o espaço $\mathcal{X} = \{d \in \mathbb{R}^n : d = v - Mv : \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n\}$, a partir dos espaços fundamentais das matrizes que definem M.
   $d = v - Mv = (I - M)v$. Logo $\mathcal{X} = C(I - M) = N(M)$, pois $M(I - M) = M - M^2 = 0$. Por sua vez, $N(M) = \{w \in \mathbb{R}^n : A(B^TA)^{-1}B^Tw = 0\}$. Como $posto(A(B^TA)^{-1}) = k$, $N(M) = N(B^T)$. A dimensão de $C(I - M)$ é a dimensão de $N(B) = n - dim(C(M))$ e uma base para $C(I - P)$ é dada pelas k colunas de B ou k linhas de B^T.

4. (25%) Para quais condições se verifica $\mathcal{X} \perp C(M)$?
   Como mostramos acima, $\mathcal{X} = C(I - M) = N(M)$. $N(M) \perp C(M)$ se e somente se $M = M^T$ e o projetor é ortogonal.

5. (25%) Considerando a instanciação de M para a qual $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, responda:

(a) Considere $y = \sum_{i=1}^{k} A_i w_i$ onde A_i são as colunas de A e $w = (2,3)^T$. $My = ?$
Como M projeta em $C(A)$, $My = y = 2A_1 + 3A_2 = (2,5,3)^T$.

(b) Caracterize $\mathcal{X}$ (definido acima) para esta M.
Resolvendo o sistema linear homogêneo com uma variável livre $B^T w = 0$, temos que $w = (-1,1,-1)^T$ define uma base para $\mathcal{X}$, que tem dimensão 1.

Questão 02: Sobre a fatoração QR, responda.

1. A matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto r foi fatorada na forma $AP = QR$, onde $Q \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $Q^T Q = I_r$, $R \in \mathbb{R}^{r\times n}$, P sendo uma matriz de permutação. Considere o espaço coluna $C(V)$ de uma matriz $V \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Descreva suncitamente as ideias principais de um algoritmo para determinar as informações abaixo:

(a) $C(V) \cap C(A)$.
Os vetores $w \in C(V) \cap C(A)$ de interesse devem atender:

i. $w = Vz$ para algum $z \in \mathbb{R}^p$.

ii. $w = Qu$ para algum $u \in \mathbb{R}^r$ que é equivalente a impor $(I - QQ^T)w = 0$ pois $(I - QQ^T)$ projeta em $C(A)^\perp$. Reinterpretando: $w \in C(A) \iff w \perp C(A)^\perp$. Ou seja:

$$w = Qu \ (\text{ ou } w \in C(A)) \iff w \in N(I - QQ^T).$$

Portanto, os vetores w devem atender $(I - QQ^T)w = (I - QQ^T)Vz = 0$.
Para todo vetor z^i em uma base para $N(V - QQ^T V)$ temos um correspondente vetor $w^i = Vz^i$, que forma um elemento da base para $C(A) \cap C(V)$. Assim sendo, a ideia do algoritmo é a seguinte:

- Calcule uma base para $N(V - QQ^T V)$. Para todo elemento z^i da base, construa o vetor $w^i = Vz^i$.

(b) $dim(C(V) \cap C(A))$
Pela discussão acima, $dim(C(V) \cap C(A))$ é a dimensão de uma base para $N(V - QQ^T V)$.
Veja o exemplo numérico abaixo. Neste exemplo, por comodidade, empregamos a fatoração SVD de $V - QQ^T V$ para caracterizar $N(V - QQ^T V)$, mas isto não era necessário para responder à questão. No exemplo, $dim(N(V - QQ^T V)) = 1$.

```
->A = round(rand(6,3)*10)
 A  =
   7.   9.   1.
   4.   6.   7.
   6.   6.   3.
   9.   8.   5.
   1.   1.   10.
   8.   6.   7.
-->[qa,ra] = qr(A)
 qa  =
  -0.4453993  -0.5790927   0.3129802  -0.3519101   0.4928113  -0.0401353
  -0.2545139  -0.5689726  -0.40437     0.3122724  -0.3819806   0.4522769
  -0.3817709  -0.0202401   0.0878285  -0.3063189  -0.6865143  -0.530089
  -0.5726563   0.2473794   0.0938295   0.7078461   0.1988054  -0.2479809
  -0.0636285  -0.0033734  -0.8383808  -0.1699346   0.3166573  -0.4048557
  -0.5090278   0.5284924  -0.1383046  -0.3935607   0.011428    0.5361322
 ra  =
  -15.716234  -15.525348  -10.43507
   0.         -3.6004948   0.2799885
   0.          0.         -11.136917
   0.          0.          0.
   0.          0.          0.
   0.          0.          0.
-->QA = qa(:,1:3);
-->V = round(rand(6,4)*10)
 V  =
   0.   6.   2.   3.
   6.   7.   5.   7.
   3.   3.   4.   5.
```

```
    3.    0.    3.    3.
    6.    5.    1.    7.
    1.    4.    6.    1.
-->M = (eye(6,6)-QA*QA')*V
 M  =
  -1.4337663   1.0190811  -1.1375536  -0.8315082
   0.539639   -0.3061687   1.7476501  -0.4647121
   1.5579647   0.3311318   0.9549487   2.5985768
   1.1874042  -2.7037142  -1.6113479   0.3961808
  -0.2539815  -0.080411   -1.5814497   0.4768033
  -1.4878294   2.0647695   1.4157705  -1.4943107
-->[Um,Sm,Vm,rkm] = svd(M)
 Um  =
  -0.2801912  -0.4341581   0.3182988  -0.5578644  -0.1757492  -0.538131
  -0.066472    0.361165   -0.5595704  -0.252932    0.4993029  -0.4886147
   0.2961967   0.6850282   0.5377094  -0.3905468  -0.0269944   0.0248387
   0.6175252  -0.3232917  -0.340895   -0.5456729  -0.0345193   0.3146192
   0.135726   -0.3153192   0.4185809   0.0738102   0.8334704   0.0825917
  -0.6554258   0.0886528  -0.0708241  -0.4111921   0.1523667   0.6043568
 Sm  =
   4.9623933   0.          0.          0.
   0.          3.6965099   0.          0.
   0.          0.          2.3735437   0.
   0.          0.          0.          8.211D-16
   0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.
 Vm  =
   0.5040439   0.3919743  -0.1374812  -0.7572284
  -0.6450384   0.2046      0.5963811  -0.4317335
  -0.3329459   0.7911094  -0.4379381   0.2674007
   0.4679874   0.4226594   0.6585125   0.4107409
 rkm  =
   3.
-->Z = Vm(:,4)
 Z  =
  -0.7572284
  -0.4317335
   0.2674007
   0.4107409
-->sol1 = V\W
 sol1  =
  -0.7572284
  -0.4317335
   0.2674007
   0.4107409
-->V*sol1-W
 ans  =
  -6.661D-16
   0.
   4.441D-16
   4.441D-16
   0.
  -3.331D-16
-->sol2 = A\W
 sol2  =
   0.7210745
  -0.6115557
  -0.366897
-->A*sol2-W
 ans  =
   8.882D-16
```

```
 2.220D-15
 1.998D-15
-4.441D-16
 8.882D-16
-1.110D-16
```

2. Duas implementações distintas do algoritmo revisado de Gram-Schmidt foram aplicadas para fatorar a matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de posto coluna completo. Em uma delas, aplicou-se pivoteamento de colunas e obteve-se a fatoração $BP_1 = Q_1R_1$. A outra implementação produziu $B = Q_2R_2$, não empregando pivoteamento de colunas.

   (a) A menos de erros numéricos, o que é a matriz $Q_1^TQ_2$?
   Observem que R_1 (e R_2) admitem inversa, pois B possui posto completo. Então $Q_1 = BP_1R_1^{-1}$, $Q_2 = BR_2^{-1}$. $Q_1^TQ_2 = R_1^{-T}P_1^TB^TBR_2^{-1}$. Substitindo $B^TB = R_2^TR_2$, $Q_1^TQ_2 = R_1^{-T}P_1^T(R_2^TR_2)R_2^{-1} = R_1^{-T}P_1^TR_2^T$.

   (b) A matriz $I - Q_1^TQ_2$ pode ter algum autovalor distinto de zero ?
   A menos que $I - Q_1^TQ_2 = 0$, e portanto $Q_1^TQ_2 = I$, sim. Como foi implementada a permutação de colunas, $Q_1^TQ_2 \neq I$ e então a matriz possui um autovalor distinto de zero.

Questão 03: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. $P = QDQ^T$ para Q ortogonal e D simétrica é um projetor.
   Falso. Para ser projetor $P^2 = P$. Então $P^2 = QD(Q^TQ)DQ^T = QD^2Q^T$. A menos que $D^2 = D$, temos que $P^2 \neq P$.

2. $A = \sum_{i=1}^n e_ie_i^T - \sum_{i=1}^r q_iq_i^T$, onde $q_i^Tq_i = 1, q_i^Tq_j = 0$ para $i \neq j$. Então A é projetor de posto $n-r$, com autovalores são 0 e 1, de multiplicidades geométricas $n-r$ e r respectivamente.
   Falso.
   De fato $A = I - QQ^T$ é um projetor com autovalores 0 e 1. Porém, a multiplicidade geométrica dos autovalores 0 e 1 é r e $n-r$ respectivamente.

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$, sabemos que P_C e P_R respetivamente projetam em $C(A), C(A^T)$. Então $\|P_CAP_R\|_1 > \|A\|_1$.
   Falso, pois $P_CAP_R = A$.

4. Se P e Q são projetores ortogonais que projetam em um mesmo espaço vetorial $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos ter $Q \neq P$.

   Resposta: Falso, quando os projetores são ortogonais, que é o caso aqui colocado no enunciado. Quando os projetores não são ortogonais, podem ser distintos. Considerando o caso de interesse aqui, veja uma demonstração por contradição.
   Assuma que sejam distintos e, neste caso, existe um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Px \neq Qx$. Como P e Q são projetores *ortogonais* sobre o mesmo subespaço $\mathcal{X}$, sabemos que $\mathbb{R}^n$ admite a decomposição ortogonal única $\mathbb{R}^n = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$. Portanto, cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, pode ser escrito de modo único como $x = w + z$ onde $w \in \mathcal{X},\ z \in \mathcal{X}^\perp$.

   Pela definição de projeção ortogonal, temos $Px = w$. Da mesma forma, $Qx = w$. Logo $Px = Qx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, contradizendo a possibilidade de P e Q serem distintos pela hipótese inicial.

5. Para qualquer matriz satisfazendo $M^2 = M = M^T$, temos que $\|Mx\|_2 < \|x\|_2$, para $x \notin C(M)$, $x \neq 0$.
   Verdadeiro. $x \notin C(M)$ pode ser escrito como $x = w + z$, $w \in C(A)$, $z \in C(A)^\perp$. Portanto, para o projetor M temos $Mx = w$. Como $z \neq 0$, $\|Mx\|_2 = \|w\|_2 < |x\|_2$.

6. Um projetor ortogonal pode não admitir fatoração espectral.
   Falso, projetores ortogonais são matrizes simétricas. Como tal, é não defectivo e é ortogonalmente similar a uma matriz diagonal.

7. P é projetor. Então $\|Px\|_2 = \|x\|_2$.
   Falso. Se $x \notin C(P)$, $Px \neq x$ e $\|Px\|_2 < \|x\|_2$.

Questão 04: Considere a função $b(x) = \alpha\cos(e^x) + \beta\sin(e^{-x})$ e um conjunto de dados a serem ajustados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, m\}$, satisfazendo $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Responda:

1. No ajuste linear dos dados acima pela função $b(x)$ escolhida, é calculado um vetor de parâmetros $\hat{x}$ que minimiza a norma Euclideana do erro $r(\hat{x}) = z - A\hat{x}$, para A e z correspondentes ao ajuste. Identifique A e z em função dos dados.
$A = \begin{bmatrix} \cos(e^{x_1}) & \sin(e^{-x_1}) \\ \cos(e^{x_2}) & \sin(e^{-x_2}) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(e^{x_m}) & \sin(e^{-x_m}) \end{bmatrix}$, $z = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ já que o sistema é linear nos parâmetros α, β.

2. O processo de identificar $\hat{x}$ que minimiza $r(\hat{x})$ pode ser entendido como um processo de projeção. Considerando os dados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, m\}$ disponíveis, o quê é projetado e onde é projetado ? Seja preciso em função dos dados.
b é projetado em $span\{A_1, A_2\} = C(A)$.

3. $r(\hat{x})$ pertence a qual subespaço vetorial ? Seja preciso em função dos dados.
$r(\hat{x}) \in N(A^T)$ pois $N(A^T) = C(A)^\perp$.

4. Identifique o sistema linear (matriz de coeficientes e termo independente) que permite encontrar $\hat{x}$ a partir dos dados do problema e da função de aproximação escolhida.

   O sistema é o sistema de equações normais $A^T A\hat{x} = A^T b$,
onde $A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \cos^2(e^{x_i}) & \sum_{i=1}^m \cos(e^{x_i})\sin(e^{-x_i}) \\ \sum_{i=1}^m \cos(e^{x_i})\sin(e^{-x_i}) & \sum_{i=1}^m \sin^2(e^{-x_i}) \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m b_i\cos(e^{x_i}) \\ \sum_{i=1}^m b_i\sin(e^{-x_i}) \end{bmatrix}$