DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

30 de Novembro de 2023

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01. Responda:

1. (25%) Defina o refletor de Householder que reflita o vetor $a = (1, 0, 1, 2)^T$ no sentido positivo da linha $e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$. Não é necessário calcular o refletor, apenas o vetor de Householder normalizado e como o refletor se relaciona com o vetor de Householder.
2. (25%) Sendo u o vetor de Householder normalizado, F o refletor e b o ponto a ser refletido, represente graficamente Fb, uu^Tb e $(I - uu^T)b$, em relação aos subespaços $span\{u\}$ e $span\{u\}^{\perp}$.
3. (50%) Considere uma matriz A de ordem 4×6. Seria possível, utilizando matrizes de permutação e refletores de Householder, construir uma sequência de transformações ortogonais que, após aplicadas em A, tenham o efeito de zerar as entradas de A armazenadas em $A_{2,1}, A_{2,6}$ e de substituir o conteúdo anteriormente existente em $A_{2,3}$ pela quantidade $\sqrt{A_{2,1}^2 + A_{2,3}^2 + A_{2,6}^2}$? Em caso negativo, justifique. Em caso positivo, detalhe os passos destas transformações, as dimensões das matrizes envolvidas e como estas matrizes deveriam ser definidas para se obter o efeito desejado.

Resolução da questão 01:

1. Para mais detalhes, ver notas de aula fatoração QR, exemplo 7.

```
-->a = [1;0;1;2]
-->r = [0;0;0;1]*norm(a,2)
 r  =
   0.
   0.
   0.
   2.4494897
-->v = a - r
 v  =
   1.
   0.
   1.
  -0.4494897
-->u = v/norm(v,2)
 u  =
```

```
   0.6738873
   0.
   0.6738873
  -0.3029054
-->F = eye(4,4)-2*u*u'
 F  =
   0.0917517   0.  -0.9082483   0.4082483
   0.          1.   0.          0.
  -0.9082483   0.   0.0917517   0.4082483
   0.4082483   0.   0.4082483   0.8164966
-->F*a
 ans  =
  -7.772D-16
   0.
  -7.772D-16
   2.4494897
```

2. Ver o desenho da Figura 8 das notas de aula de fatoração SVD. Fb é a reflexão de b, obtida por meio de $(I - 2uu^T)b$. O ponto $uu^T b$ é a projeção de b em $span\{v\}^\perp$ e este ponto fica *no meio do caminho*, entre b e sua reflexão Fb. O vetor $b - uu^T b$ pertence ao $span\{u\}$.

3. Sim, é possível e há mais de uma maneira de se proceder, dependendo de como a permutação de colunas é realizada. Vamos fazer uma sequência de 3 transformações, do tipo $\hat{A} = APFP^T$, onde $\hat{A}$ é a matriz com a propriedade desejada do enunciado. A matriz P troca as colunas de A de forma que as colunas $1, 3, 6$ fiquem contíguas e possamos assim empregar um refletor de Householder. Este é o aspecto imprescindível, as colunas $1, 3, 6$ precisam ficar contíguas na matriz antes da aplicação do refletor. A matriz F é o refletor de Householder. Por fim, aplicamos a matriz P^T para restaurar as colunas de A à sequência original. Na nossa resolução, vamos colocar as colunas que devemos alterar nas últimas 3 posições. Então P será definida por $pivot = (2, 4, 5, 1, 3, 6)$. Veja o exemplo numérico abaixo. Todas as matrizes P, P^T, F são quadradas de ordem 6. Embora no enunciado tenhamos soliciado que ao final das transformações o conteúdo de $\hat{A}_{2,3}$ seja $\sqrt{A_{2,1}^2 + A_{2,3}^2 + A_{2,6}^2}$, na execução abaixo, colocamos o simétrico, $-\sqrt{A_{2,1}^2 + A_{2,3}^2 + A_{2,6}^2}$, por ser a opção mais estável neste caso.

```
A  =
   4.   3.   2.   7.   6.   1.
   7.   5.   6.   2.   5.   3.
   3.   5.   8.   4.   2.   9.
   5.   1.   0.   8.   8.   8.
-->pivot = [2;4;5;1;3;6];
-->P = zeros(6,6);
-->for i = 1:6
-->P(pivot(i),i) =1
-->end
 P  =
   0.   0.   0.   1.   0.   0.
   1.   0.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.   1.   0.
   0.   1.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   1.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.   0.   1.
-->F = eye(6,6);
-->Ahat = A*P
 Ahat  =
   3.   7.   6.   4.   2.   1.
   5.   2.   5.   7.   6.   3.
   5.   4.   2.   3.   8.   9.
   1.   8.   8.   5.   0.   8.
-->x = Ahat(2,4:6)'
 x  =
   7.
```

```
    6.
    3.
-->normax = norm(x,2)
 normax  =
    9.6953597
-->e2 = [0;1;0]
 e2  =
    0.
    1.
    0.
-->a = normax*e2
 a  =
    0.
    9.6953597
    0.
-->v = x + sign(x(1))*normax*e2
 v  =
    7.
    15.69536
    3.
-->u = v / norm(v,2)
 u  =
    0.4012504
    0.8996813
    0.1719644
-->F2 = eye(3,3) - 2*u*u'
 F2  =
    0.6779963  -0.7219949  -0.1380016
  -0.7219949  -0.6188527  -0.3094264
  -0.1380016  -0.3094264   0.9408565
-->F(4:6,4:6) = F2
 F  =
    1.   0.   0.   0.           0.           0.
    0.   1.   0.   0.           0.           0.
    0.   0.   1.   0.           0.           0.
    0.   0.   0.   0.6779963  -0.7219949  -0.1380016
    0.   0.   0.  -0.7219949  -0.6188527  -0.3094264
    0.   0.   0.  -0.1380016  -0.3094264   0.9408565
-->A*P*F*P'
 ans  =
    1.1299938   3.  -4.4351114   7.   6.  -0.2300027
  -2.220D-16   5.  -9.6953597   2.   5.   0.
  -4.9839844   5.  -9.901644    4.   2.   5.5782924
    2.2859687   1.  -6.0853854   8.   8.   6.8368437
```

Questão 02. Considere um problema de projeção em $C(A)$ para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e assuma que A possua posto $r < n = \min\{m, n\}$. Responda justificando:

1. (30%) Considere o sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$. $(A^T A)^{-1}$ existe ?
2. (30%) O que representa o vetor $z = A\hat{x}$, caso $\hat{x}$ exista ?
3. (40%) Como você poderia usar a fatoração SVD de A para obter uma solução do sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$, caso exista ?

Resolução da questão 2:

1. Não existe, pois A possui posto incompleto r e $A^T A$ possui ordem n e posto r, também incompleto.
2. Existe a solução $\hat{x}$ e não é única. z representa o ponto de $C(A)$ mais próximo de b, na norma Euclideana.

3. Com a fatoração SVD $A = U\Sigma V^T$, podemos obter a pseudo-inversa $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ de A e com ela uma solução $\hat{x}$ por meio de $\hat{x} = A^+ b = V\Sigma^+ U^T b$.

Questão 03. Sobre fatorações as fatorações matriciais vistas, responda:

1. (40%) Durante o curso, discutimos duas formas de se fazer a fatoração SVD de A não quadrada. Uma delas é pouco estável e a outra é estável. Descreva a não estável e justifique por quais motivos é pouco estável (máximo 8 linhas).
2. (30%) Aplicou-se o algoritmo de duas fases para fornecer a fatoração $A = Q\Lambda Q^T$ das matrizes A, B indicadas abaixo. Qual a forma das matrizes obtidas após a aplicação da primeira e da segunda fase ? Justifique considerando as transformações ortogonais empregadas (máximo 8 linhas).
3. (30%) Considerando o algoritmo empregado no item acima, é possível assegurar que sempre conseguiremos recuperar os n autovetores da matriz fatorada, com a fatoração obtida ? Sim ou não ? Justifique com no máximo 8 linhas.

```
A  =
    17.   14.   16.   12.   8.
    14.   22.   29.   18.   20.
    16.   29.   41.   21.   31.
    12.   18.   21.   18.   12.
    8.    20.   31.   12.   26.
B  =
    2.   3.   3.   5.   9.
    2.   9.   6.   4.   0.
    2.   2.   5.   3.   5.
    9.   3.   3.   6.   3.
    7.   4.   6.   4.   4.
```

Resolução da questão 3:

1. Assumimos que o posto de A é r. Não estável: calcula-se $A^T A$ e fatoramos $A^T A = Q\Lambda Q^T$. Os vetores singulares à direita de A são as colunas $q_i : i = 1, \ldots, r$ associados aos r autovalores $\lambda_i > 0$ de A. Os valores singulares de A são $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} : i = 1, \ldots, r$. Os vetores singulares à esquerda de A são $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i : i = 1, \ldots, r$. A fatoração é não estável pois $A^T A$ é pior condicionada, e os valores singulares muito pequenos de A serão difíceis de serem computados, pois serão avaliados através de λ_i^2, grandezas ainda menores.
2. Matriz A, real simétrica. Primeira fase produz uma Hessenberg superior. Como A é simétrica, e as operações ortogonais à direita e a esquerda de A são simétrias, o resultado é tridiagonal. Na segunda fase, aplicamos o algoritmo QR iterativamente, que produz uma triangular, com os autovalores na diagonal. Matriz B não simétrica. Primeira fase produz uma Hessenberg superior e segunda fase uma triangular superior, fatoração de Schur.
3. Se a matriz de entrada for real simétrica sim, pois a forma da matriz similar obtida com a fatoração é diagonal e não há falta de autovetores (é não defectiva). Entretanto, para matrizes não simétricas, a fatoração obtida é uma Schur e apenas um autovetor estará disponível através da fatoração. Além disso, pode ser o caso de que haja falta de autovetores (não somam a dimensão do espaço) caso a matriz seja defectiva.

Questão 04. Responda Verdadeiro ou Falso justificando sua resposta. Atribuições verdadeiras ou falsas adequadamente dadas, mas com justificativas erradas não serão consideradas. Todos os itens são igualmente valorados.

1. Toda matriz de posto igual a 3 com $\sigma_2 = \sigma_3$ satisfaz a condição $||A - A_1||_2 = ||A - A_2||_2$.
2. Os valores singulares de $AA^T A$ são iguais a $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$, quando o posto de A é igual a r.
3. Toda matriz real simétrica $A = Q\Lambda Q^T$ tem sua fatoração SVD escrita da seguinte forma $\Sigma = \Lambda$ e $U = Q$, e $V = Q$.
4. Toda transformação ortogonalmente equivalente é uma transformação similar, pois preserva os valores singulares.

Resolução da questão 4:

1. Verdadeiro. Sabendo que $A - A_k = \sigma_{k+1} u_{k+1} v_{k+1}^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$, temos que $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$. Deste resultado: $||A - A_1||_2 = \sigma_2$ e $||A - A_2||_2 = \sigma_3$. Assim, se $||A - A_1||_2 = ||A - A_2||_2$ então $\sigma_2 = \sigma_3$.

2. Falso. $AA^TA = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) = U\Sigma\Sigma^T\Sigma V^T$. Assim, os valores singulares da matriz AA^TA são iguais a $\sigma_1^3, \cdots, \sigma_r^3$, para uma matriz A de posto igual a r.

3. Falso. A matriz simétrica, a não ser que seja positiva definida ou semi-positiva definida, o que não foi especificado no enunciado, pode ter autovalores negativos. Porém, os valores singulares de A em sua fatoração SVD são sempre positivos. Desta forma, para um autovalor $\lambda_i < 0$ temos que $v_i = q_i$ onde q_i é o autovetor associado a λ_i e $u_i = -v_i$.

4. Falso. Uma transformação similar é escrita como $A = XBX^{-1}$ e a transformação ortogonalmente equivalente é $A = EBD$ para E, D ortogonais. Se X for ortogonal, a transformação similar é simplificada para $A = XBX^T$. Assim sendo, se a matriz X for ortogonal, a transformação similar é também uma transformação ortogonalmente equivalente. Porém, para o sentido inverso, se matriz A não for quadrada ou se $E \neq D^{-1}$, a transformação ortogonalmente equivalente $A = EBD$ não é similar.