DCC639 - ALC - Prova III

Prof. Alexandre Salles da Cunha

17 de Junho de 2025

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja através do telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas. Todas as respostas devem ser justificadas.

Questão 1: Usando seus conhecimentos sobre a fatoração a $A = U\Sigma V^T$, responda verdadeiro ou falso e justifique. Para as questões desta avaliação, considere que a função traço $tr(B) : B \in \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ corresponde à soma dos elementos na diagonal principal de B.

1. $tr(A^T A) = tr(Z^T A^T AZ)$ quando Z é unitária.
   Resposta: Verdadeiro. Podemos argumentar de diversas formas. $A^T A$ e $Z^T A^T AZ$ são similares ($Z^{-1} = Z^T$), portanto possuem os mesmos autovalores. Logo, $\sum_i \lambda_i(Z^T A^T AZ) = tr(Z^T A^T AZ) = tr(A^T A) = \sum_i \lambda_i(A^T A) = \sum_i \sigma_i^2(A)$.
   Por outro caminho de demonstração, (sendo o posto de A igual a r) desenvolvemos:

$$
\begin{aligned}
tr(Z^T A^T AZ) &= tr(Z^T(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T)Z) \\
&= tr((Z^T V)\Sigma^2(V^T Z)) \\
&= tr(V\Sigma^2 V^T) \\
&= tr(\Sigma^2) \\
&= \sigma_1^2 + \dots \sigma_r^2 \\
&= tr(V\Sigma^2 V^T) \\
&= tr(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T) \\
&= tr(A^T A)
\end{aligned}
$$

2. Se A é quadrada e $C = A^+ BA$, então C e B possuem os mesmos autovalores.
   Resposta: Falso. Se A admite posto incompleto, $A^+ \neq A^{-1}$ e C, B não são similares. Veja o contra exemplo abaixo, onde B é uma diagonal com entradas 3 e 2 na diagonal e $A = uu^T$ onde $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$. Veja que C tem um autovalor zero e o autovalor positivo não é um dos autovalores de B.

```
B  =
   2.   0.
   0.   3.
 A  =
   1.   1.
   1.   1.
u = [sqrt(2]/2;sqrt(2)/2]
```

```
u  =
   0.7071068
   0.7071068
 A  =
   1.   1.
   1.   1.
-->Amais = u*(1/2)*u'
 Amais  =
   0.25   0.25
   0.25   0.25
-->C = Amais*B*A
 C  =
   1.25   1.25
   1.25   1.25
-->spec(C)
 ans  =
   0.
   2.5
```

3. A^+b resolve o sistema de equações normais associado a projetar b em $C(A)$.
   Resposta: Verdadeiro: $A^+ = V\Sigma^+U^T$. Substituindo $x^+ = A^+x$ em A^TAx temos:

$$\begin{aligned} A^TAx^+ &= (V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T)(V\Sigma^+U^T)b \\ &= V\Sigma^2(V^TV)\Sigma^+U^Tb \\ &= V\Sigma^2\Sigma^+U^T)b \\ &= (V\Sigma U^T)b \\ &= A^Tb \end{aligned}$$

4. $AA^+b \in C(A)$.
   Resposta: Verdadeiro. $A(A^+b) = Ax^+ = p$, logo x^+ certifica que p, projeção de b em $C(A)$, está em $C(A)$.

Questão 2: É dada $A = \begin{pmatrix} d & 1 \\ 0 & \frac{1}{d} \\ d & -1 \end{pmatrix}$, com colunas ortogonais e $d \in \mathbb{R}, d \neq 0$.

Observação geral para a resolução da questão: Como as colunas de A são ortogonais, são linearmente independentes, e fornecem uma base para $C(A)$. Para obter $A = U\Sigma V^T$ onde $U = [U_1, U_2]$ possui duas colunas ortonormais, base para $C(A)$, basta dividir cada coluna de A por sua norma Euclideana. O valor das normas Euclideanas destas colunas são os valores singulars. Para completar a fatoração SVD de A, basta verficiar que $V^T = I_2$.

1. (25%) Quais são os valores singulares de A ? **Resposta:** A matriz A possui dois valores singulares, pois seu posto é 2. Normalmente atribuímos a σ_1 o maior valor singular. Como este valor depende do valor assumido por d, vamos simplesmente indicar os valores, sem que sejam ordenados.
Valor singular 1: $\sigma = \|(d, 0, d)^T\|_2 = |d|\sqrt{2}$.
Valor singular 2: $\sigma = \|(1, 1/d, -1)^T\|_2 = \sqrt{2 + 1/d^2}$.
$\sigma_1 = \max\{|d|\sqrt{2}, \sqrt{2 + 1/d^2}\}$
$\sigma_2 = \min\{|d|\sqrt{2}, \sqrt{2 + 1/d^2}\}$.

2. (25%) $A^+ = ?$
Pelo desenvolvimento acima, sem ordenar os valores singulares, temos $A = U\Sigma V^T$ onde $V^T = I_2$, $\Sigma = \begin{pmatrix} |d|\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2 + 1/d^2} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \frac{d}{|d|\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+1/d^2}} \\ 0 & \frac{1}{d\sqrt{2+1/d^2}} \\ \frac{d}{|d|\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2+1/d^2}} \end{pmatrix}$.
Então temos: $A^+ = I_2\Sigma^+U^T$ onde: $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{|d|\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2+1/d^2}} \end{pmatrix}$ e
$U^T = \begin{pmatrix} \frac{d}{|d|\sqrt{2}} & 0 & \frac{d}{|d|\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+1/d^2}} & \frac{1}{d\sqrt{2+1/d^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2+1/d^2}} \end{pmatrix}$

3. (50%) Seja A_1 a matriz de rank-1 que melhor aproxima A, na norma $\|\cdot\|_F$. É possível $C(A_1) = span\{(1, 0, 1)^T\}$ (responda SIM ou NÃO) ? Em caso positivo, quais condições devem ser observadas para que isso ocorra ? Em caso negativo, apresente uma justificativa.
Resposta: Sim, é possível, basta que $\sigma_1 = \max\{|d|\sqrt{2}, \sqrt{2 + 1/d^2}\} = |d|\sqrt{2}$ e que o primeiro valor singular seja estritamente maior que o segundo (a norma Euclideana da primeira coluna de A seja maior que a da segunda). Então temos:

$$\begin{aligned} |d|\sqrt{2} &> \sqrt{2 + 1/d^2} \\ 2d^2 &> 2 + 1/d^2 \\ 2d^4 - 2d^2 - 1 &> 0 \\ 2z^2 - 2z - 1 &> 0 \end{aligned}$$

Então temos $z \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. O primeiro intervalo não nos interessa pois $z = d^2$ e $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, $d > \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ garante que a norma da primeira coluna seja estritamente maior que norma da segunda coluna de A.

Questão 3: Seja $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ um refletor de Householder cujo hiperplano de reflexão é $span\{u\}^{\perp}$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\|u\|_2 = 1$ e P uma matriz de permutação. Responda justificando.

1. Quais são os autovalores (com as suas multiplicidades algébricas e geométricas) e autovetores de H ?
Resposta: $F = I - 2uu^T$, F é simétrica e não possui autovalor defectivo. Então:

$$(I - 2uu^T)x = \lambda x$$

Temos dois casos a considerar:

   - Para $x \in span\{u\}$, temos $(I - 2uu^T)u = u - 2u = -u$. Portanto, u é autovetor com $\lambda = -1$ sendo seu autovalor, com multiplicidade algébrica e geométrica 1.
   - Os demais autovetores de $F = I - 2uu^T$ pertencem a $span\{u\}^{\perp}$. Basta tomar uma base ortonormal para este espaço vetorial $m-1$ dimensional que termos $m-1$ outros autovetores associados ao autovalor 1. Veja: para $x \in span\{u\}^{\perp}$, temos $(I - 2uu^T)x = x - 2u(u^Tx) = x$. A multiplicidade algébrica e geométrica do autovalor 1 é $m-1$.

2. Qual é o determinante de H ?
Resposta: $det(H) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i = (-1)^1(1)^{m-1} = -1$.

3. Para qualquer $a \in \mathbb{R}^m$, $(Ha + uu^Ta) \in span\{u\}^{\perp}$. Falso ou verdadeiro ?
Resposta: Verdadeiro.

$$\begin{aligned}(Ha + uu^Ta) &= (H + uu^T)a \\ &= (I - 2uu^T + uu^T)a \\ &= (I - uu^T)a\end{aligned}$$

$(I - uu^T)$ é um projetor ortogonal de posto $m-1$ que projeta em $span\{u\}^{\perp}$.

4. PHP^T é um refletor de Householder ? Falso ou Verdadeiro ? Em caso positivo, indique o hiperplano de reflexão.
Resposta: Verdadeiro.
PHP^T é um refletor de Householder se existe algum $w \in \mathbb{R}^m$, $\|w\|_2 = 1$ tal que

$$PHP^T = I - 2ww^T$$

$$\begin{aligned}PHP^T &= P(I - 2uu^T)P^T \\ &= PIP^T - 2(Pu)(u^TP^T) \\ &= I - 2ww^T\end{aligned}$$

onde $w = Pu$. O refletor de Householder que tem Pu como construtor tem como hiperplano de reflexão o subespaço $span\{Pu\}^{\perp}$.

5. Seja Q um projetor ortogonal. Então $I - HQH$ é um projetor ? Falso ou verdadeiro ? Em caso positivo, diga em qual espaço projeta e qual a sua dimensão.
Resposta: Verdadeiro.
$I - HQH$ é projetor se e somente se HQH for projetor:

$$\begin{aligned}(HQH)^2 &= HQ(HH)QH \\ &= HQQH \\ &= HQH\end{aligned}$$

No desenvolvimento acima, usamos o fato de que $Q^2 = Q, H^2 = I$. Então $I - HQH$ projeta no complemento ortogonal de $C(HQH)$. Como H possui posto completo, $posto(HQH) = posto(Q)$. Portanto, $dim(C(HQH)) = dim(C(Q))$ e $dim(C(Q)^{\perp}) = m - dim(C(Q))$.

Questão 4: Assuma que $H(X) = \begin{bmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{bmatrix}$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. É possível empregar a fatoração espectral de $H(X)$ para alguma X adequadamente escolhida, para encontrar a fatoração SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \neq n$ (responda SIM ou NÃO) ? Em caso positivo diga como e diga quais propriedades X deve possuir.

   Resposta: Sim, se X for ortogonalmente equivalente a A, por exemplo $X = R$ onde $A = QR$ é a fatoração QR de A. Através dos autovetores de $H(R)$ e da matriz ortogonal Q são recuperdos os vetores singulares de A, à esquerda e à direita. Os valores singulares de A são os autovalores positivos de $H(R)$.

2. Seja σ_i e σ_j dois valores singulares distintos de A. Então $N(H(A) - \sigma_i I) \perp N(H(A) - \sigma_j I)$?

   Resposta: Verdadeiro. $N(H(A) - \sigma_i I)$ é o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda_i = \sigma_i$ de $H(A)$. Auto espaços de autovalores distintos são sempre ortogonais.

3. Se $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é simétrica e possui autovalores $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, com os auto espaços associados a estes autovalores sendo, respectivamente, $span\{y^1\}, span\{y^2\}$, onde $y^1 = (\cos(\theta), -\sin(\theta))^T$ e $y^2 = (\sin(\theta), \cos(\theta))^T$ (para algum $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$), qual é a fatoração espectral de $H(A)$?
   Resposta: A fatoração espectral de $H(A)$ fornece os valores singulares de A. Além disso, das $2n$ entradas correspondentes aos autovetores de $H(A)$ extraímos, após devida normalização, os vetores singulares u, v de A. Isto é, os autovalores de $H(A)$ são $\{\sigma_i, -\sigma_i : i = 1, \ldots, 2\}$, onde σ_i é o $i - simo$ valor singular de A. Como A é simétrica positiva definida (os dois autovalores informados são positivos), $\sigma_1 = \lambda_1 = 5, \sigma_2 = \lambda_2 = 3$.

   Para fazermos o processo inverso, isto é, para compor os autovetores de $H(A)$ a partir de y^1, y^2, observamos que a simetria de A garante que a mesma tem vetores singulares a esquerda e a direita iguais ($U = V$ na fatoração SVD).

   Então temos $H(A)Q = Q\Lambda$, onde $\Lambda = Diagonal(5, 3, -5, -3)$ e $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ é a matriz ortogonal, contendo em suas colunas os autovetores de $H(A)$, definida como:

   $$Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 & \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}y^1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \end{array}\right)$$

   Verifique, por meio da expressão de Q apresentada acima, que $Q^T Q = I_4$.