DCC639 - ALC - Prova III

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

8 de Novembro de 2025

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova. Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Todas as respostas devem ser justificadas.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- A seguinte notação é usada na prova. $N(A), C(A)$ são espaços vetoriais associados a uma matriz A. e_i é um vetor de zeros exceto pela $i-$ésima que é 1.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01: Seja $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é um refletor de Householder e seja $u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 = 1$ o seu construtor. Responda às questões propostas justifidando sua resposta.

1. (40%) O algoritmo de duas fases para fatoração espectral foi aplicado ao refletor F, resultando ao final em $F = QZQ^T$. Caracterize as matrizes Q e Z com o maior nível de detalhes que seu conhecimento o permita fazer.
   Resolução: Como o refletor de Householder é uma matriz simétrica, é unitariamente similar a uma matriz diagonal. O método de duas fases produz uma Z diagonal. Portanto Z contém em sua os autovalores -1 com multiplicidade algébrica e geométrica 1, e 1, com multiplicidades geométrica e algébrica $n-1$. A matriz Q é ortogonal. Portanto, podemos escrever : $F = \begin{bmatrix} u & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}$. O construtor do refletor é autovetor associado ao autovalor -1, pois $(I - 2uu^T)u = -u$. Os demais autovetores, $q_2, q_3, \ldots, q_n$ formam uma base ortonormal para $span\{u\}^{\perp}$.

2. (30%) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é um refletor de Householder ? Em caso positivo, identifique claramente o seu construtor u.
   Resolução: Verdadeiro. M é um refletor de Householder se e somente se existe u tal que $M = (I - 2uu^T)$. Como observado na questão anterior $Mu = -u$ se aplica. Chamando $u = (u_1, u_2)^T$, a solução deste sistema linear é $u_1 = -u_2$. Normalizando, temos o construtor $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$.

3. (30%) Se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal, então $M = QFQ^T$ é um refletor de Householder com construtor u. Verdadeiro ou falso ?
   Falso.

$$\begin{aligned} M &= Q(I - 2uu^T)Q^T \\ &= QQ^T - 2(Qu)(u^TQ^T) \\ &= I - 2vv^T \end{aligned}$$

Como u tem norma 2 unitária e Q é ortogonal, $Qu = v$ é o construtor do refletor, e $\|v\|_2 = 1$. Por tanto, é refletor mas seu construtor é $v = Qu$.

Questão 02: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. A matriz A defectiva foi submetida ao algoritmo iterativo QR para cálculo de autovalores, obtendo uma fatoração $A = \hat{Q}G\hat{Q}^T$. Os autovetores de A são as colunas de $\hat{Q}$.
   Resposta: Falso. Matrizes defectivas não possuem autovetores suficientes para gerar uma base para $\mathbb{R}^n$. Portanto, as colunas de Q ortogonal não podem ser autovetores de A.

2. Se A é quadrada e $C = A^+BA$, então C e B possuem os mesmos autovalores.

   Resposta: Falso. C e B podem ter autovalores diferentes. Não há garantia de que C, A sejam similares, a menos que $A^+ = A^-$.

3. Toda matriz quadrada é unitariamente similar a uma matriz diagonal.
   Resposta: Falso. Se fosse verdadeira a afirmativa, haveria Q unitária tal que $A = Q\Lambda Q^T$. Entretanto, apenas as matrizes normais satisfazem as condições necessárias para admitirem esta fatoração. Portanto, a afirmativa desconsidera as matrizes que são similares a diagonais (mas não unitariamente similares) e as matrizes defectivas que não possuem autovetores em número suficiente para gerar o $\mathbb{R}^n$.

4. Um refletor de Householder F de ordem n é ortogonalmente equivalente à matriz identidade.
   Resposta: Verdadeiro. Duas matrizes A, B são ortogonalmente equivalentes se e somente se existem D, E tais que $D^TD = I, E^TE = I$ satisfazendo $A = EBD$. Sabemos que $H^2 = H$. Logo $H = HI = HII$. Fazendo $E = H, D = I$, prova-se o resultado. Observe a consequência deste resultado: embora F não seja similar à identidade (F possui -1 como autovalor), é orgonalmente equivalente à identidade, possuindo todos os seus valores singulares iguais a 1.

5. Um refletor de Householder F é similar à matriz identidade.
   Resposta: Falso. Se fosse verdade, F não teria -1 como autovalor como tem, associado ao seu construtor (autovetor de -1).

Questão 03: Sabe-se que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ e $A = x_1 y_1^T + 2x_2 y_2^T$, onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ são pares de vetores ortogonais. Considere a soma direta $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T)$ e o fato de que todo $b \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito como $b = b_1 + b_2, b_1 \in C(A), b_2 \in C(A)^{\perp}$ assim como todo $y \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como $y = y_1 + y_2, y_1 \in C(A^T), y_2 \in C(A^T)^{\perp}$. Responda justificando.

1. $A^+ = y_1 x_1^1 + \frac{1}{2} y_2 x_2^T$.
2. $AA^+ b_1 = b_1$ pois $b_1 \in C(A)$ e AA^+ projeta em $C(A)$.
3. $AA^+ b_2 = 0$ pois $b_2 \in N(A^T) = C(A)^{\perp}$ e AA^+ projeta em $C(A)$.
4. $A^+ A y_1 = y_1$ pois $y_1 \in C(A^T)$ e $A^+ A$ projeta em $C(A^T)$.
5. $A^+ A y_2 = 0$ pois $y_2 \in N(A)$ e $A^+ A$ projeta em $C(A^T)$.

Questão 04: Considere as matrizes $A_i : i = 1, \ldots, 7$ e os algoritmos de Fase I e II para fatoração de Schur QTQ^T e os algoritmos de Fase I e II para fatoração $U\Sigma V^T$. Responda justificando.

```
A1: 11.18034   12.253653    8.3181729   6.4398758
     0.         6.0702553   0.8355497   3.6387267
     0.         0.         -3.7563089  -7.5583941
     0.         0.          0.          2.2711996

A2:   2.       -10.         1.0292576   1.9851017
    -11.        13.752066   1.3442926   5.4271282
      0.         5.6287059 -2.5980588   0.7788091
      0.         0.        -0.3121      4.8459927

A3: 11.18034   -17.378147  -1.544D-15  -1.981D-15
   -17.378147   30.943434  -2.3626431  -3.109D-15
   -1.544D-15   -2.3626431  1.9677643   0.6752866
   -1.981D-15   -3.109D-15  0.6752866   0.7454015

A4: -11.18034    16.149799  -9.546D-16   2.734D-16
     -8.882D-16 -8.2093224   4.8153006   1.110D-16
     -8.882D-16  2.220D-16   4.2041864   4.0837776
      0.        -8.882D-16   1.776D-15   1.500494

A5:   0.          0.          0.          0.         -11.18034   -8.882D-16  -8.882D-16   0.
      0.          0.          0.          0.          16.149799  -8.2093224   2.220D-16  -8.882D-16
      0.          0.          0.          0.         -9.546D-16   4.8153006   4.2041864   1.776D-15
      0.          0.          0.          0.          2.734D-16   1.110D-16   4.0837776   1.500494
    -11.18034    16.149799  -9.546D-16   2.734D-16   0.          0.          0.          0.
     -8.882D-16 -8.2093224   4.8153006   1.110D-16   0.          0.          0.          0.
     -8.882D-16  2.220D-16   4.2041864   4.0837776   0.          0.          0.          0.
      0.        -8.882D-16   1.776D-15   1.500494    0.          0.          0.          0.

A6: 0.3530774  -0.2943418   0.4009017   0.3577388   0.3577388   0.4009017  -0.2943418  -0.3530774
  -0.6095995  -0.1118179   0.2350448   0.2462502   0.2462502   0.2350448  -0.1118179   0.6095995
   0.0609797   0.5756097   0.006535    0.4060939   0.4060939   0.006535    0.5756097  -0.0609797
   0.0025058   0.2636914   0.5329062  -0.382716   -0.382716    0.5329062   0.2636914  -0.0025058
   0.6599757  -0.1977253   0.156872    0.0269804  -0.0269804  -0.156872    0.1977253   0.6599757
  -0.2535139  -0.4912739   0.4338648   0.0783706  -0.0783706  -0.4338648   0.4912739  -0.2535139
  -0.0127571  -0.4655956  -0.503731   -0.1712108   0.1712108   0.503731    0.4655956  -0.0127571
  -0.0001799  -0.0526823  -0.1827774   0.6810411  -0.6810411   0.1827774   0.0526823  -0.0001799

A7: -20.898398   0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.
   0.         -7.5104399   0.          0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.         -4.3748443   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.         -0.8432136   0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.8432136   0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.          4.3748443   0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.          0.          7.5104399   0.
   0.          0.          0.          0.          0.          0.          0.          20.898398
```

1. A_1 foi obtida ao aplicarmos a fatoração QR (reduzida) em uma determinada matriz A. Os valores singulares de A encontram-se na diagonal de A_1 ?
   Resposta: Falso. $A_1 = R$, a matriz R na fatoração QR reduzida de A. A única informação que poderia ser extraída daqui é que A e A_1 são ortogonalmente equivalentes e portanto possuem os mesmos valores singulares.

2. Os algoritmos de Fase I e II para fatoração de Schur foram aplicados em A e a matriz A_1 foi obtida. A pode ser defectiva ?
   Resposta: A matriz A é não defectiva, pois os seus autovalores são iguais aos autovalores da matriz A_1 que estão na sua diagonal principal. Como estes valores são diferentes, os autovetores de cada autopar são linearmente independentes entre si. A multiplicidade algébrica é igual a geométrica (valor 1) para cada autopar.

3. Algum dos 4 algoritmos citados no enunciado foi aplicado à matriz A obtendo-se a matriz A_2. A matriz A é simétrica ? Qual (ou quais) algoritmo foi (foram) empregados ?

Resposta: A não pode ser simétrica, dado que A_2 é Hessenberg superior. O algoritmo empregado é portanto a fase I da fatoração espectral que transforma A em uma matriz similar a A Hessenberg superior.

4. Algum dos 4 algoritmos citados no enunciado foi aplicado à matriz B obtendo-se a matriz A_3. Os autovetores de B geram uma base para $\mathbb{R}^4$?
Resposta: Verdadeiro. A_3 é tridiagonal simétrica. Portanto A é simétrica.

5. Sabe-se que vale a seguinte relação $A_5 A_6 = A_6 A_7$. Sabe-se que $A_4 = A_5(4:8, 1:4)$ e que existem Q_1, Q_2, matrizes unitárias, tais que $A = Q_1 A_4 Q_2$. O que pode ser dito sobre A ?
Resposta: $A_5 = A_6 A_7 A_6^T$ (assumindo que A_6 seja ortogonal e como A_7 é diagonal , esta é a fatoração espectral de $A_5 = H(A_4)$. Portanto os valores singulares de A_4 são as entradas positivas na diagonal de A_7. Os vetores singulares de A_7 e de A podem ser obtidos pelas colunas de A_6, pegando as primeiras 4 linhas (e normalizando) para os vetores singulares à direita (os v's) e as últimas 4 linhas (e normalizando) para os vetores singulares à esquerda (os u). Sempre usando as colunas associadas às entradas positivas da diagonal de A_7.

6. Considerando o enunciado da questão anterior, apresente a matriz de rank 2 que melhor aproxima a matrix A na norma espectral.
Resposta: Os valores singulares que devem ser considerados são $\sigma_1 = 20.898398$ e $\sigma_2 = 7.5104399$. Portanto definimos $v_1 = \frac{A_6(1{:}4,8)}{\|A_6(1{:}4,8)\|_2}, u_1 = \frac{A_6(5{:}8,8)}{\|A_6(5{:}8,8)\|_2}$. De forma análoga $v_2 = \frac{A_6(1{:}4,7)}{\|A_6(1{:}4,7)\|_2}, u_2 = \frac{A_6(5{:}8,7)}{\|A_6(5{:}8,7)\|_2}$ e a melhor aproximação de rank 2 é dada por $\sigma_1(Q_1u_1)(Q_2v_1)^T + \sigma_2(Q_1u_2)(Q_2v_2)^T$.