Projeções

Profs. Alexandre Salles da Cunha e Ana Paula Couto

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Ciência da Computação
Belo Horizonte, Brasil

acunha@dcc.ufmg.br
ana.coutosilva@dcc.ufmg.br

2022/2

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

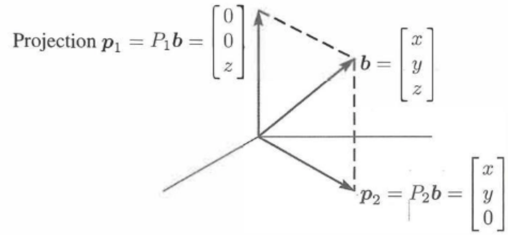
UFMG - ICEx
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

Problema

$p = Pb$ é a projeção do vetor b em:

- Um eixo (p.ex z).
- Um plano.
- Um subespaço qualquer gerado por uma matriz $m \times n$.

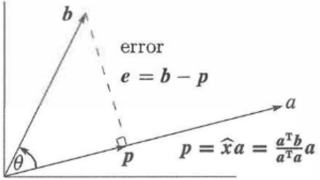
Como encontrar p e a matriz de projeção P?



Introduction to Linear Algebra - Gilbert Strang

Matrizes de Projeção: $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Projeção em uma linha



Introduction to Linear Algebra - Gilbert Strang

- A projeção de um vetor b em uma linha em a é o ponto em a mais próximo de b.
- A linha que liga b a p é perpendicular ao vetor a. $p = \hat{x}a$.
- A diferença entre a projeção em a e o vetor b é $e = b - p$.
- A matriz de projeção P é definida a partir da projeção p.

Como $e \perp a$, temos:

$$a^T(b - \hat{x}a) = 0$$
$$a^T b - \hat{x}a^T a = 0$$
$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$$
$$p = \frac{a^T b}{a^T a} a$$

1. $b = a \rightarrow \hat{x} = 1.\ Pb = a.$
2. $b \perp a \rightarrow a^T b = 0$ e $p = 0.$

Projetar o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ em $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$p = \hat{x}a = \frac{a^T b}{a^T a} a = \frac{5}{9} a.$$

Diferença $b - p$:

$$p = \frac{5}{9} a = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

e

$$e = b - p = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-1}{9} \\ \frac{-1}{9} \end{bmatrix}$$

Matriz de Projeção em uma linha

$p = \hat{x}a = a\frac{a^Tb}{a^Ta} = Pb$, $P = \frac{aa^T}{a^Ta}$.

- P é uma matriz rank 1 $(m \times m)$.
- $P^2 = P$. Por isso P é chamada de idempotente.

Exemplo: Matriz de projeção P em $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$:

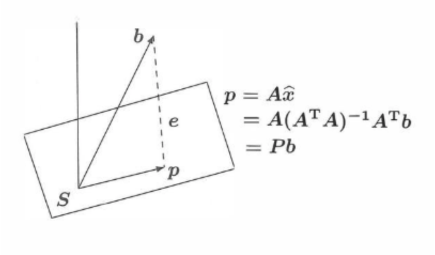
$$P = \frac{aa^T}{a^Ta} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Para $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p = Pb = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

Considere n vetores $A_1, \cdots, A_n \in \mathbb{R}^m$ linearmente independentes ($m \geq n$).

Problema

Definir o vetor projeção $p = \hat{x}_1 A_1 + \cdots + \hat{x}_n A_n \in \mathbb{R}^m$.



Introduction to Linear Algebra - Gilbert Strang

- O vetor projeção p pertencente ao espaço gerado pelos vetores A_i.
- p é o vetor mais próximo ao vetor b.

- Combinações lineares dos vetores $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são os vetores $Ax \in \mathcal{C}(A)$.
- $p = A\hat{x}$ é a combinação dos vetores A_i mais próxima do vetor b no sentido da norma Euclidiana.
- $\hat{x}$ é a única escolha que resulta no vetor mais próximo a b e que pertence à $\mathcal{C}(A)$.

Como $A_i \perp (b - A\hat{x}) \forall i$, temos:

$$A_1^T(b - A\hat{x}) = 0$$

$$\vdots$$

$$A_n^T(b - A\hat{x}) = 0$$

Forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - A\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0_m$$

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

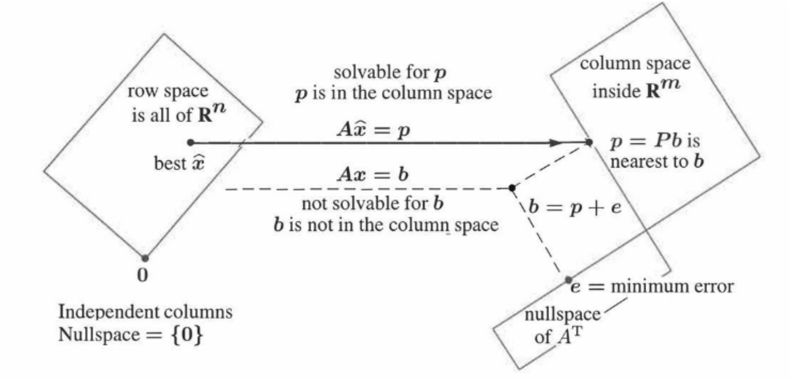
Conceitualmente, encontrar $p = A\hat{x}$ e a matriz de projeção P envolve:

- Calcular $\hat{x}$:
  - Resolver o sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$.
  - $A^T A$ é uma matriz simétrica $n \times n$ com $r(A^T A) = r(A)$.
  - Como os vetores a_i são LI, $A^T A$ tem inversa e $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.
- Calcular p:
  - $p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$.
- Matriz de projeção P:
  - $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Algumas considerações:

- $p \in \mathcal{C}(A)$.
- Vetor diferença $e = b - A\hat{x}$ é perpendicular ao $\mathcal{C}(A)$.

O vetor diferença pertence a qual subespaço?



Introduction to Linear Algebra - Gilbert Strang

Exemplo:

Encontre $\hat{x}$, p e P para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Calcular A^TA e A^Tb: $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Resolver a equação $A^TA\hat{x} = A^Tb : \hat{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$
- Calcular matriz de projeção:

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Suponha que as colunas de A sejam ortonormais, ou seja $A = Q$.

Assim, $A^T A = Q^T Q = I$ e:

- $\hat{x} = Q^T b$.
- $p = Q\hat{x}$.
- $P = QQ^T$.

Em forma matricial:

$$p = \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T b \\ \vdots \\ Q_n^T b \end{bmatrix} = Q_1(Q_1^T b) + \cdots + Q_n(Q_n^T b).$$

A projeção p é a combinação de projeções unidimensionais!

Quando Q é quadrada $m = n$, e $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$, temos:

- $Q^T = Q^{-1}$.
- $\hat{x} = Q^T b = Q^{-1} b$.
- $p = b$, $P = QQ^T = I$.
- Todo $b = QQ^T b$, ou seja, a soma das suas componentes $\forall q_i$.

Exemplo:

Encontre a projeção $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ no espaço gerado pelas colunas da matriz $Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplo: As projeções de b em q_1, q_2, q_3 são p_1, p_2, p_3:

$$p_1 = Q_1(Q_1^T b) = \frac{2}{3} Q_1$$

$$p_2 = Q_2(Q_2^T b) = \frac{2}{3} Q_2;$$

$$p_3 = Q_3(Q_3^T b) = \frac{-1}{3} Q_3$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2+4-2 \\ 4-2-2 \\ 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

E quando a matriz A não é ortonormal?
Podemos redefinir a matriz A utilizando uma matriz ortonormal?

- Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com colunas LI pode ser fatorada em $A = QR$. Q é uma matriz ortonormal e R uma matriz triangular superior.
- Para calcular $\hat{x}$, resolvemos $R\hat{x} = Q^T b$. Menor custo computacional, maior estabilidade.

Veremos como fatorar $A = QR$ nas próximas aulas.