DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

18 de Maio de 2023

<u>**Instruções:**</u>

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Esta prova foi revisada diversas vezes, de forma que não há necessidade de consultar os professores para esclarecer qualquer aspecto sobre o enunciado ou sobre os dados das questões. Faz parte da avaliação ser capaz de interpretar as questões propostas.

Questão 01: [25%] Sobre ajuste de curvas, responda:

1. (33,3%) Descreva como você encontraria a parábola $C + Dt + Et^2$ que resulta no menor erro de projeção do vetor $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nos pontos $t = -2, -1, 0, 1, 2$. Apresente, com base nos dados fornecidos, o sistema utilizado para obter a solução proposta.

   Solução: Para a solução deste problema, o sistema de equações normais $A^TA\hat{x} = A^Tb$ deverá ser resolvido.

   Com base nos dados apresentados, temos: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$,

   $A^Tb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *(Exercício 1 - Primeira Lista de Ajuste de Curvas).*

2. (33,3%) O sistema de equações normais pode ser resolvido pela Fatoração de Cholesky, que é mais barata que, por exemplo, a fatoração $A = QR$. Porém, não raro, resolver o sistema de equações normais via QR é mais adequado numericamente. Esta frase é verdadeira, parcialmente verdadeira, ou falsa ? Justifique (assuma que A tem posto completo).

   Solução: A frase é verdadeira. A matriz A^TA é simétrica definida positiva. Portanto, pode ser fatorada utilizando a Fatoração de Cholesky, que é mais barata computacionalmente. No entanto, caso a matriz A possua um número de condição elevado, a matriz A^TA possuirá um número de condição ainda mais elevado, incorrendo em problemas numéricos. Nestes casos, realizar a fatoração Fatoração QR da matriz A, evitando o cálculo explícito do termo A^TA (slides 39 a 42 - Ajuste de Curvas.)

3. (33,3%) A matriz P_r é um projetor ortogonal em $C(A^T)$ e P_c é um projetor ortogonal em $C(A)$. Então $P_cAP_r = I$. Verdadeiro ou falso ? Justifique.
   Solução: Esta afirmativa é claramente falsa pois não é sequer dimensionalmente correta se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ não for quadrada.

Veja o resultado da aplicação dos projetores P_C, P_r à esquerda e à direita de A (esse exercício foi feito em sala de aula):

$$\begin{aligned}
P_c[A_1, \ldots, A_n]P_r &= \\
[P_cA_1, \ldots, P_cA_n]P_r &= \\
AP_r &= \\
\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} P_r &= \\
\begin{bmatrix} a_1^T P_r \\ a_2^T P_r \\ \vdots \\ a_m^T P_r \end{bmatrix} &= A
\end{aligned}$$

Questão 02: [25%] Sabendo que a fatoração QR completa de $A(m \times n)$, com posto completo igual a n é $A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, onde 0 representa uma matriz $(m-n) \times n$ de zeros, responda, justificando sua resposta com no máximo 3 linhas:

1. (25%) As n colunas de Q_1 formam uma base ortonormal para qual subespaço fundamental?
   Solução: As colunas de Q_1 formam uma base ortonormal obtida, por exemplo, pela versão clássica do algoritmo de Gram-Schmidt, para o espaço coluna de A.

2. (25%) As $m-n$ colunas de Q_2 formam uma base ortonormal para qual subespaço fundamental?
   Solução: As $m-n$ colunas de Q_2 formam uma base ortonormal para o espaço nulo à esquerda de A (ou espaço nulo de A^T). As colunas de Q formam uma base ortornormal para $\mathbb{R}^m$

3. (50%) Podemos afirmar que $I = Q_2Q_2^T + Q_1Q_1^T$? Justifique.
   A expressão é verdadeira. $Q_1Q_1^T$ projeta em $C(A)$ e $Q_2Q_2^T$ projeta em $N(A^T)$ que são espaços ortogonais. Portanto $I - Q_1Q_1^T = Q_2Q_2^T$.

Questão 03:[22%]Considerando as matrizes A_1, A_2 dadas, forneça:

1. (50%) Uma base ortonormal para $C(A_1^T) \cap C(A_2)$.

   Solução: $C(A_1^T) \cap C(A_2) = span \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

   Observações:

   - *A interseção de subespaços é um subespaço.*
   - *As matrizes A_1 e A_2 já estão escritas por meio de fatorações que revelam seu posto. Portanto, já são conhecidas bases para seus espaços coluna e linha.*
   - *Basta colocar as linhas de A_1 e as colunas em A_2 lado a lado e verificar que qualquer vetor que pertença a $C(A_1^T) \cap C(A_2)$ deve ser múltiplo do vetor indicado acima.*

2. (50%) O projetor ortogonal que projeta em $(C(A_1^T) \cap C(A_2))^\perp$.

   Solução: $P = I - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   - $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *projeta em* $C(A_1^T) \cap C(A_2)$.
   - *Portanto, para se projetar no complemento ortogonal, basta construir o projetor P indicado.*
   - *Um caminho alternativo (envolvendo mais operações aritméticas do que o necessário) para a solução é encontrar os dois vetores que geram o subespaço ortogonal ao subespaço dado pela interseção, resolvendo, por exemplo, o sistema* $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$ *e calcular a matriz de projeção no subespaço gerado pela base encontrada.*

Justifique os passos necessários para obter suas respostas.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Questão 04: [28%] (Questão idêntica ao slide 26 do módulo Fatoração QR, com discussões sobre qualidade de fatorações nos slides 43-47.) Considere os algoritmos clássico e revisado de Gram-Schmidt para produzir a fatoração QR (reduzida) de uma matriz A. Seja A_i, Q_i respectivamente a i-ésima coluna de A e de Q. Denote por R_i e r_i^T respectivamente a $i-$ésima coluna e linha de R. Utilizando no máximo 5 linhas para cada questão, responda:

1. (25%) Qual é a diferença na ordem em que as entradas de Q, R (isto é Q_i, R_i, r_i^T) são computadas entre os algoritmos ?

   Solução: O algoritmo Clássico calcula $Q_1, R_1, Q_2, R_2, \ldots$. O algoritmo revisado calcula $Q_1, r_1^T, Q_2, r_2^T, \ldots$.

2. Considere a matriz A abaixo e sua fatoração obtida por um dos métodos citados. Sabe-se que $A_3 = A_1 + 2A_2$ e $A_4 = A_3 - 3A_1$. Pede-se:

   (a) (25%) Qual algoritmo foi empregado ? Justifique.

   Solução: Clássico. Pelo enunciado $A_3, A_4 \in span\{A_1, A_2\} = span\{Q_1, Q_2\}$. A diferença entre a coluna A_3 e sua projeção em $span\{A_1, A_2\}$ é praticamente um vetor de zeros (veja r_{33}). Porém, ao se normalizar a diferença, o vetor Q_3 deixou de ser um vetor de zeros para ser um vetor lineamente independente de Q_1, Q_2. O valor de r_{44} deveria ser mas não é próximo de zero pois a coluna A_4 foi tardiamente projetada em $span\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, sofrendo o efeito de Q_3 muito distinto de zero.

   (b) (25%) Há algum problema com os resultados numéricos obtidos ? Em caso positivo, identique-os e justifique sua resposta.

   Solução: Há muitos problemas, essencialmente causados pela perda de ortogonalidade de Q_3 em relação a Q_2, Q_1, como explicado acima.

   - *A fatoração sugere um posto de 3, quando o posto de A é 2.*

- *As colunas Q_3, Q_4 não tem nenhum significado neste caso, pois foi usada a fatoração reduzida e não há detecção de posto numérico.*

(c) (25%) Apresente uma base para $C(A)$ a partir da fatoração e indique uma medida numérica para a qualidade desta base (não é necessário calcular a medida de qualidade, apenas apresente sua expressão matemática).
Solução: As colunas Q_1, Q_2 fornecem uma base aproximada para $C(A)$. Para avaliar sua qualidade, basta calcular $\|I - [Q_1, Q_2]^T [Q_1, Q_2]\|_2$. Se esta quantidade for da ordem de $\|A\|_\infty \epsilon$ (ϵ é a precisão da máquina), a base possui boa qualidade. Caso contrário, procedemos a uma reortogonalização (veja slides 43-47 do curso de Fatoração QR).

```
A  =
   1.   3.   7.    4.
   4.   3.   10.  -2.
   0.   4.   8.    8.
   2.   3.   8.    2.
Q  =
   0.2182179   0.4264014   0.4229444  -0.4229444
   0.8728716  -0.2132007   0.0704907  -0.0704907
   0.          0.8528029   0.8458889  -0.8458889
   0.4364358   0.2132007   0.3172083  -0.3172083
 R  =
   4.5825757   4.5825757   13.747727   0.
   0.          4.6904158   9.3808315   9.3808315
   0.          0.          6.300D-15   8.9523237
   0.          0.          0.          8.9523237
```