DCC639 - Álgebra Linear Computacional
Resolução comentada da Prova 1 - Moodle

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

25 de abril de 2023

Questão 01: (nível de dificuldade: pouco complexa, bastando conhecer as propriedades de potências de matrizes simétricas. A resposta pode ser lida no enunciado do problema, sem necessidade de qualquer conta, a menos de eventual normalização, que no caso seria uma troca de sinal de $\mathbf{x}^2$.) Uma matriz real simétrica A foi fatorada em sua forma espectral $A = X\Lambda X^T$ e possui os autovalores $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 8$, aos quais associam-se os seguintes autovetores $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \end{bmatrix}^T$, respectivamente, onde $\theta = \frac{14}{15}\pi$. Considere o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}^T$. Para um valor de k inteiro bastante grande, apresente um vetor $\mathbf{y}$, tal que $\mathbf{y} \perp \frac{A^k\mathbf{v}}{\|A^k\mathbf{v}\|_2}$, para este k tão grande quanto você queira. A sua resposta para o vetor $\mathbf{y}$ deve ser tal que ele possua norma Euclideana unitária, e que sua primeira coordenada y_1 seja positiva ou nula e caso seja nula, que y_2 seja positiva. Sua resposta deve ter precisão de pelo menos 4 casas decimais.

Conceitos necessários e em avaliação:

1. *slide 62 - Fundamentos de Álgebra Linear: Para matrizes com n autovetores LI, $x^1, \cdots, x^n$ com n autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$:*

$$\begin{gathered}
\forall v \in \mathbb{R}^n, v = c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \\
Av = A(c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) \\
Av = c_1Ax^1 + c_2Ax^2 + \cdots + c_nAx^n \\
Av = c_1\lambda_1x^1 + c_2\lambda_2x^2 + \cdots + c_n\lambda_nx^n \\
A^kv = c_1\lambda_1^kx^1 + c_2\lambda_2^kx^2 + \cdots + c_n\lambda_n^kx^n
\end{gathered}$$

2. *slide 68 - Fundamentos de Álgebra Linear: Matrizes simétricas podem ser fatoradas como $S = Q\Lambda Q^T$, com autovetores ortonormais.*

Solução 1: *Como $A^kv \to c_1\lambda_1^k\mathbf{x}^1$ quando $k \to \infty$, e a fatoração espectral de A simétrica foi dada (seus autovetores são ortonormais), $\mathbf{x}^1 \perp \mathbf{x}^2$. Assim, uma solução para o problema é $y = \frac{\mathbf{x}^2}{||\mathbf{x}^2||} = \mathbf{x}^2 =$ [0.207912 0.978148] .* Vale observar que, para esta resolução, a resposta era dada explicitamente no vetor $\mathbf{x}^2$, a menos da eventual normalização de sua primeira componente.

Solução 2: *Para encontrar y, poderia ser usada a definição de produto interno, fazendo $\langle y, \mathbf{x}^1 \rangle = 0$.*

Questão 02 (nível de dificuldade: trivial, bastando combinar 3 propriedades de autovalores de matrizes simétricas): A matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ real simétrica possui autovalores iguais a 9 e 5. Quais são os autovalores, o determinante e o traço da matriz real simétrica Z que satisfaz a relação $A^T BA = (Z^7 - 14I)^6$, onde A é ortogonal. Os autovalores devem ser informados em ordem não crescente de seus módulos. É necessário que sua resposta seja precisa até a quarta casa decimal, pelo menos.

Conceitos necessários e em avaliação:

1. *slide 63 - Fundamentos de Álgebra Linear: As matrizes A e $C = BAB^{-1}$ são denominadas similares e, como tal, tem o mesmo espectro (conjunto de autovalores).*
2. *slide 61 - Fundamentos de Álgebra Linear: $A^k x = \lambda^k x$.*
3. *slide 63 - Fundamentos de Álgebra Linear: $(A + sI)x = Ax + sx = \lambda x + sx = (\lambda + s)x$.*

Solução:

1. *Considere λ_1:*

$$\begin{array}{cc}
\lambda_1(B) = \lambda_1((Z^7 - 14I)^6) & \textit{(similaridade)} \\
(\lambda_1(B))^{\frac{1}{6}} = \lambda_1((Z^7 - 14I)) & \textit{(potência)} \\
(\lambda_1(B))^{\frac{1}{6}} + 14 = \lambda_1(Z^7) & \textit{(shift)} \\
(\lambda_1(B)^{\frac{1}{6}} + 14)^{\frac{1}{7}} = \lambda_1(Z) & \textit{(potência)} \\
\lambda_1(Z) = 1.478481 &
\end{array}$$

2. *.....* $\lambda_2 = 1.476633$.
3. *Determinante da matriz $Z = \lambda_1 \lambda_2 = 2.183175$.*
4. *Traço da matriz $Z = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.95511$*

Questão 03 (nível de dificuldade: trivial, a resposta pode ser lida no enunciado.) A fatoração $PA = LU$ de A é fornecida abaixo e emprega a representação do vetor *pivot* para P. Quais são os mutiplicadores empregados para a linha $i = 4$ da matriz A ? Nos campos abaixo, entre com os multiplicadores na ordem em que foram necessários para a fatoração. Caso haja mais entradas disponíveis do que o número de multiplicadores empregados, entre com zeros nos campos que você entender que não são necessários.

$pivot = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.11111 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.12500 & -0.12500 & 1 & 0 & 0 \\ -0.33333 & -0.12500 & -0.20000 & 1 & 0 \\ -0.20000 & 1.00000 & -0.50000 & -0.20000 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 3.00000 & -8.00000 & 12.00000 & -9.00000 & 6.00000 \\ 0 & 7.00000 & 0.00000 & -8.00000 & -12.000 \\ 0 & 0 & 5.00000 & 8.00000 & 12.00000 \\ 0 & 0 & 0 & -7.00000 & 5.00000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.00000 \end{bmatrix}$$

Conceito necessário em avaliação:

1. *slide 52 - Fatorações básicas: Os valores* $-m_{ij}$: $j = 1, \ldots, k-1$ *são empregados na linha* k *de* L, *antes do elemento da diagonal principal; o índice* k *satisfaz* $pivot(k) = i$.

Solução: *Considerando* $i = 4$, $pivot(3) = 4$. *Assim, os multiplicadores para a linha 4 da matriz original são:* $m_{41} = 0.12500, m_{42} = 0.12500$. *Não são necessários mais de dois multiplicadores.*

Questão 04 (nível de dificuldade: trivial, bastando aplicar a fatoração mais apropriada, Cholesky Outer, idêntica a slides do curso) Aplicou-se o algoritmo de Cholesky para se fatorar a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ abaixo. Em alguma iteração do algoritmo, obteve-se a seguinte fatoração $A = \sum_{i=1}^{1} L_i L_i^T + \hat{A}$ onde $\hat{A}$ é uma matriz de zeros e L_i é a $i-$ ésima coluna de L na fatoração encontrada.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 12 \\ 6 & 9 & 12 & 18 \\ 8 & 12 & 16 & 24 \\ 12 & 18 & 24 & 36 \end{bmatrix}$$

Conceitos necessários:

1. *slide 47- Fundamentos de Álgebra Linear: Se* $r(D) = p$ *então* D *é igual à soma de* p *matrizes de rank 1 (Produto externo de 2 vetores)*

2. *slides 76 até 80 - Fatoração de Cholesky, visão Outer Cholesky.*

Solução:

1. *Observação inicial: quando p, o rank da matriz não é igual à sua ordem, como no caso de muitas questões da prova, e a matriz* $\hat{A}$ *é nula como informado no enunciado, o algorithmo de Cholesky é interrompido em p iterações com a conclusão de que a matriz não tem posto completo. É exatamente o caso aqui.*

2. *O posto de* A *é igual a 1, dado que a matriz* A *pode ser fatorada como uma matriz de rank 1. As demais colunas e linhas são combinações lineares da coluna 1 da matriz* L *que é igual a linha 1 da matriz* L^T.

3. *As entradas de* L_1^T *são:* $[2\,3\,4\,6]$.

Questão 05 (nível de dificuldade: trivial, idêntica a vários exercícios feitos em sala) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times3}$ abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 36 & 18 \\ 21 & 43 & 19 \\ 49 & 67 & 31 \\ 7 & 36 & 15 \end{bmatrix}$$

Conceitos necessários:

1. *slides 51, 52 e 54 - Fundamentos de Álgebra Linear.*

Solução:

1. *O posto coluna e o posto coluna de qualquer matriz são iguais. Para obter esta solução verifique se* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$, *somente se* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *Para a matriz* A *dada, o posto é igual a 2. A melhor*

forma a proceder para determinar o posto e o que é pedido também nos itens abaixo é fazer uma fatoraçao $A = CR$ qualquer de A que revela seu posto. O posto é o número de linhas de R que é o número de colunas de C.

2. *As dimensões são: $N(A) = 1, N(A^T) = 2, C(A) = C(A^T) = 2$, lembrando que $dim(C(A^T)) + dim(N(A)) = 3$ e $dim(C(A)) + dim(N(A^T)) = 4$*

3. *A base para $N(A)$ possui dimensão 1, com vetor $x = [0.079333\, 0.370220\, -0.925550]$ que é solução de $Ax = 0$. Uma vez obtida a fatoração $A = CR$ usada no primeiro item, basta usar as linhas da matriz R (que geram uma base para o espaço linha de A, $C(A^T)$) para se obter um vetor $y \in N(A) \iff y \perp C(A^T)$ que, após a normalização é a resposta da questão.*

Questão 06 (nível de dificuldade: trivial, idêntica a slide do curso) A fatoração $PA = LU$ de A é fornecida abaixo e emprega a representação do vetor *pivot* para P. Qual é o resultado de se aplicar no vetor $d = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}^T$ as transformações linha elementares que foram aplicadas em A e que a transformaram em U ?

$pivot = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.111111 & 1 & 0 & 0 \\ -0.166667 & 0.250000 & 1 & 0 \\ -0.111111 & -0.125000 & -0.166667 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 8 & -12 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Conceitos necessários:

1. *slides 20, 27 - Fatorações básicas: O vetor y é a imagem da transformação linear construída para transformar A em U aplicada em b. Ou seja, $Ly = b$.*

Solução: *Como estamos considerando a fatoração LU com pivoteamento, basta resolvermos o sistema $Ly = Pd$. Assim, temos $y = [.000000\, 6.777778\, -1.361111\, 2.842593]$.*

Questão 07 (nível de dificuldade: trivial) Verdadeiro ou Falso?

1. Suponha que a matriz A seja inversível: $AA^{-1} = I$. A primeira coluna de A^{-1} é ortogonal ao espaço gerado pelas linhas $2, 3, \cdots, n$. (V) - *Para encontrarmos a primeira coluna da inversa, podemos resolver o sistema linear $Av_1 = e_1$, com $e_1 = 1$ e demais elementos iguais a zero. Somente o produto interno entre a_1^T e v_1 é diferente de zero. Os demais produtos são iguais a zero, ou seja, a primeira coluna da inversa é ortogonal às linhas $2, 3, \cdots, n$.*

2. Vetores b que não pertencem a $C(A)$ formam um subespaço. (F) *Pela necessidade de fechamento à multiplicação por escalar, é necessário que o vetor zero esteja no conjunto para ser denominado subespaço. Como $0 \in C(A)$, os vetores que não pertencem a $C(A)$ não podem definir subespaço.*

3. É possível definir uma matriz A onde $Ax = [1\ 1\ 1]^T$ tem solução e $A^T[1\ 0\ 0]^T = [0\ 0\ 0]^T$. (F) *Os vetores $[1\ 1\ 1]^T$ e $[1\ 0\ 0]$ não são ortogonais.*

4. Se $AB = 0$, então as colunas da matriz $B \in C(A)$ e as linhas de $A \in C(B^T)$. (F) *As colunas da matriz B pertencem ao $N(A)$ e as linhas de A pertencem ao $N(B^T)$.*

5. O maior posto possível de uma matriz $A^{6\times 4}$ é 4. Se o posto for completo, a solução do sistema $Ax = b$, quando existe, é única. Sendo completo o posto, $N(A)$ contém somente o vetor nulo. (V)

6. O espaço coluna da matriz $C = AB$ está contido no espaço coluna de A. (V)

7. O espaço coluna de $A - I$ é igual ao espaço coluna de A. (F) *Contra-exemplo: se A for simétrica não singular (por exemplo, a própria identidade !) e tiver um autovalor 1, a matriz $A - I$ é singular.*

8. Se $A^{9\times 12}$ e $Ax = b$ possui solução para todo b, então $C(A) = \mathbb{R}^9$. (V)

9. Ao adicionarmos uma coluna b em A criando uma matriz $[A|b]$, a dimensão do espaço coluna da nova matriz aumenta quando b é linearmente dependente das demais colunas de A. (F) *O posto da matriz aumentada somente varia se b for linearmente independente das colunas de A.*

10. É possível resolver o sistema $A^k x = b$, sem calcular a k-ésima potência de A. (V) Vide lista de exercícios, uso das fatorações básicas.