DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

31 de Outubro de 2023

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01 Responda à seguintes questões:

1. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ e sua fatoração completa $A = QR$.
   (a) (15%) As colunas de q_1, q_2, q_3 de Q são base(s) para qual(is) subespaço(s) fundamental(is) ?
   (b) (15%) Qual o menor valor da norma Euclidiana entre os vetores linha de R?
2. (70%) Considere duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n_A}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n_B}$ e sejam $\{A_k : k = 1, \ldots, n_A\}$ e $\{B_k : k = 1, \ldots, n_B\}$ as colunas de A e B respectivamente. As matrizes A e B podem ter colunas linearmente dependentes. Construa um teste ou algoritmo que permita responder se $C(A) \subseteq C(B)$ ou se $C(A) \not\subseteq C(B)$. Não é necessário escrever o pseudo-código do algoritmo/teste.

Resolução da questão 1:

1. Primeira parte:
   (a) O conjunto $\{q_1, q_2\}$ é uma base para $C(A)$. q_3 é uma base para $N(A^T)$.
   (b) $\|r_3\|_2 = 0$. Veja que para garantir a fatoração completa, a linha 3 de R deve ser nula, pois a coluna 3 de Q recebeu um elemento de $N(A^T)$ e não de $C(A)$.
2. Procedemos da seguinte forma, para decidir a questão do pertencimento:
   - Fazemos a fatoração (QR) reduzida de B, isto é: $BP_B = Q_B R_B$. Assumimos que r_B é o posto de B, que é também o número de colunas de Q_B.
   - Então, para cada coluna $A_k : k = 1, \ldots, n_A$ calculamos o erro:
   $$v_k = (I_m - Q_B Q_B^T) A_k \quad (1)$$
   - Se $\|v_k\|_2 = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n_A$, temos que $C(A) \subseteq C(B)$. Caso contrário, se para algum k se observa $\|v_k\|_2 > 0$, então $C(A) \not\subseteq C(B)$

Questão 02 Sobre projeções responda:

1. (40%) Sejam P e $(I-P)$ matrizes de projeção ortogonais e as suas respectivas transformações lineares Py e $(I-P)z$, para vetores z, y quaisquer. Qual o ângulo formado entre os vetores Py e $(I-P)z$? Justifique algebricamente a sua resposta.

2. Considere as matrizes $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ e $I - P$ onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m > n)$ possui posto completo. Então responda:

   (a) (20%) P é projetor ? Em caso positivo, P projeta onde ? Em caso positivo, é projetor ortogonal ? Justifique suas respostas.

   (b) (20%) $posto(P) = m - n$? Justifique.

   (c) (20%) Se $\|(I-P)b\| = 0$, b é linearmente independente das colunas de A. Responda verdadeiro ou falso e justifique.

Resolução da questão 2:

1. Parte 1

$$\begin{aligned} (Py)^T(I-P)z &= \\ y^TP^T(I-P)z &= \\ y^T(P^T-P^2)z &= \\ y^T(P-P)z &= 0 \qquad \text{usando } P = P^T, P = P^2 \end{aligned}$$

   Portanto, os dois vetores são ortogonais, formando um ângulo de $\frac{\pi}{2}$.

2. Parte 2

   (a) Sim, P é projetor ortogonal, pois satisfaz a idempotência:

$$\begin{aligned} P^2 &= \\ A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T &= \\ A(A^TA)^{-1}A^T \end{aligned}$$

   e simetria

$$\begin{aligned} P^T &= \\ (A(A^TA)^{-1}A^T)^T &= \\ A(A^TA)^{-T}A^T &= \\ A(A^TA)^{-1}A^T & \qquad \text{já que } A^TA, (A^TA)^{-1} = (A^TA)^{-T} \text{ são simétricas} \end{aligned}$$

   P projeta em $C(A)$. Veja tome um $z \in \mathbb{R}^m$ qualquer:

$$\begin{aligned} A(A^TA)^{-1}A^Tz &= \\ A((A^TA)^{-1}A^Tz) &= \\ Au &\in C(A) \end{aligned}$$

   (b) Falso, pois $posto(P) = n$, a dimensão do espaço em que projeta.

   (c) Falso. $\|(I-P)b\| = 0 \iff (I-P)b = 0$ para qualquer norma vetorial e, portanto, $b \in C(A)$. Portanto, b é linearmente dependente das colunas de A.

Questão 03 Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ satisfazendo $A_3, A_5 \in span\{A_1, A_2, A_4\} = C(A)$ (A_k representa a $k-$ésima coluna de A). Após alguma permutação P das colunas de A foi obtida a seguinte fatoração $AP = QR$, onde os fatores são abaixo discriminados.

```
ALGO
Q  =
   0.3779645   0.5070926   0.4743416
   0.          0.7888106  -0.0527046
  -0.3779645   0.2817181  -0.5270463
   0.7559289  -0.1690309  -0.1581139
   0.3779645   0.1126872  -0.6851602
R  =
   2.6457513  -0.7559289  -0.7559289   1.8898224   0.
   0.          2.5354628   1.3522468   1.3522468   1.183216
   0.          0.          1.2649111   1.2649111  -1.2649111
pivot  = 1. 5. 3. 2. 4.
```

Além disso, foram empregados dois algoritmos para produzir a fatoração $A = QR$ de A: GS Clássico, GS Revisado. As saídas destes algoritmos (não necessariamente nesta ordem) é apresentada abaixo. Responda, apresentando suas justificativas:

1. (10%) Com base apenas no enunciado da questão, sem levar em conta a saída de qualquer uma das três fatorações apresentadas, apresente um limite superior para $posto(A)$.
2. (50%) Identifique qual saída corresponde a qual algoritmo (GS Clássico e Revisado).
3. (30%) Para cada algoritmo que você caracterizar, identifique se na saída do algoritmo há alguma informação nas linhas ou colunas das correspondentes Q, R que devem ser desconsideradas em decorrência de erros numéricos.
4. (10%) Qual é o posto de A ? Forneça uma base para $C(A)$ à partir das fatorações.

```
ALG1
Q1  =
   0.3779645   0.6943651  -0.2637522  -0.0100482  -0.1653954
   0.          0.5400617   0.1318761   0.5827932   0.
  -0.3779645  -0.1543033   0.3296902   0.5903293   0.
   0.7559289  -0.231455   -0.7253185  -0.0276324   0.4410543
   0.3779645  -0.3857584  -0.5275044   0.5576728  -0.8821086
 R1  =
   2.6457513   1.8898224  -0.7559289   0.         -0.7559289
   0.          1.8516402   1.8516402  -5.551D-17   1.8516402
   0.          0.          8.419D-16  -0.065938   -0.065938
   0.          0.          0.          1.7307952   1.7307952
   0.          0.          0.          0.          1.259D-16

ALG2
Q2  =
   0.3779645   0.6943651   0.          2.230D-17  -2.181D-17
   0.          0.5400617   0.4282302   0.5519368  -0.3932963
  -0.3779645  -0.1543033   0.2141151   0.5651966  -0.1787711
   0.7559289  -0.231455   -0.695874    0.0430942   0.6972071
   0.3779645  -0.3857584  -0.5352877   0.6116057   0.5720674
 R2  =
   2.6457513   1.8898224  -0.7559289   0.         -0.7559289
   0.          1.8516402   1.8516402  -5.551D-17   1.8516402
   0.          0.          1.037D-15   0.1070575   1.7664495
   0.          0.          0.          1.728739    1.625976
   0.          0.          0.          0.          1.6625709
```

Resolução da questão 3:

1. O enunciado diz que $C(A) = span\{A_1, A_2, A_4\}$, logo A_3, A_5 são desnecessárias para descrever o espaço e $posto(A) \leq 3$. Veja que $C(A) = span\{A_1, A_2, A_4\}$ não garante que $posto(A) = 3$.
2. ALG1 é GS revisado e ALG2 é GS clássico. A entrada r_{55} da matriz $R2$ erroneamente sugere que A_5 seja linearmente independente de A_1, A_2, A_3, A_4. Além disso, a fatoração de ALG2 sugere que o posto seja 4, quando isso não pode ser verdade, face à resposta dada para o item anterior. Já a fatoração produzida pelo ALG1 corretamente identifica o posto da matriz e a dependência linear entre A_3, A_5 das demais colunas de A.
3. Os dois algoritmos, ALG1 e ALG2, forneceram fatorações onde Q possui o mesmo número de colunas de A. Porém, como A tem posto incompleto, todas as colunas de Q, nos dois algoritmos, ALG1 e ALG2, associadas a A_3, A_5 devem ser desconsideradas, pois deveriam ser identicamente nulas. Em resumo, na deficiência de posto, estas colunas não deveriam ser retornadas pelo algoritmo. Além disso, as entradas ao longo das linhas de $R1, R2$ referentes a estes índices, $3, 5$ também não têm significado, pois as colunas q_3, q_5 não devem ser empregadas para se representar as demais. Assim, também não deveriam ser retornadas. Veja

que mesmo as entradas $r_{3,4}, r_{3,5}$ de R1, produzidas pelo algoritmo revisado, não dizem nada, deveriam ser nulas, pois A_3 é linearmente dependente de A_1, A_2, segundo as entrada $r_{3,3}$ da mesma matriz. Por sua vez, A_5 é linearmente dependente das demais e $r_{3,5}$ também deveria ser zero.

4. O posto é 3, pois a fatoração com permutação de colunas produziu uma fatoração QR reduzida, capaz de caracterizar o posto de A.

Questão 04 Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. A solução do sistema de equações normais quando $A = Q$, isto é, quando A tem colunas ortonormais, é dada por $\hat{x} = Q^T b$.
2. Uma matriz é perfeitamente condicionada quando seu número de condição, para alguma norma matricial induzida qualquer, é inferior à unidade.
3. Todo projetor possui pelo menos um autovalor nulo e um autovalor um.
4. Os algoritmos Gram-Schmidt clássico e Gram-Schmidt revisado são matematicamente equivalentes, mas não são numericamente equivalentes.
5. O sistema de equações normais pode ser resolvido pela Fatoração de Cholesky, que é mais barata que, por exemplo, a fatoração $A = QR$. Porém, não raro, resolver o sistema de equações normais via QR é mais adequado numericamente. Assuma que A tem posto completo.
6. Sejam ALG1 e ALG2, algoritmos propostos para fatorar a matriz A em QR. Para ALG1, temos $||I - Q_1^T Q_1|| = 10^{-08}$ e para ALG2, temos $||I - Q_2^T Q_2|| = 10^{-02}$. ALG2 é o algoritmo mais estável numericamente.
7. Se o projetor P satisfaz $Px = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ então $P = I$.

Resolução da questão 4:

1. Verdadeiro. A solução do sistema de equações normais se reduz a:

$$\begin{aligned} A^T A\hat{x} &= A^T b \\ Q^T Q\hat{x} &= Q^T b \\ \hat{x} &= Q^T b \end{aligned}$$

2. Falso, pois $k(A) \geq 1$ para qualquer matriz, em qualquer norma induzida por norma vetorial. Não há matriz cujo número de condição é menor que a unidade. Matrizes perfeitamente condicionadas são aquelas que possuem $\kappa(A) = 1$.
3. Falso. Contra-exemplo: $P = I$, para o qual todos os autovalores são iguais a 1. Para qualquer outro projetor distinto da matriz nula (outro contra-exemplo, que só tem zero como autovalor), a afirmativa é verdadeira.
4. Verdadeiro. Dado que o GS revisado desconta as projeções assim que as colunas de Q são calculadas, e GS clássico só projeta (ou ortogonaliza) A_k quando todas as colunas $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ são disponíveis, os dois algoritmos produzem resultados numéricos distintos, diante de aritmética de precisão finita.
5. Verdadeiro. A matriz $A^T A$ é simétrica definida positiva. Portanto, pode ser fatorada utilizando a Fatoração de Cholesky, que é mais barata computacionalmente. No entanto, caso a matriz A possua um número de condição elevado, a matriz $A^T A$ possuirá um número de condição ainda mais elevado, incorrendo em problemas numéricos. Nestes casos, é recomendável realizar a fatoração Fatoração QR da matriz A, evitando o cálculo explícito do termo $A^T A$.
6. Falso. Para a fatoração $A = QR$, o algoritmo mais estável numericamente é aquele que garante, o máximo possível, a ortogonalidade entre as colunas geradas. Assim, a norma da matriz resultante da diferença entre a matriz I e matriz da $Q^T Q$ tem que ser a menor possível, ou seja, o algoritmo mais estável numericamente é o ALG1.
7. Verdadeiro, pois nesse caso $C(P) = \mathbb{R}^n$.