DCC639 - ALC - Prova I

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

9 de Abril de 2024

Instruções:

- Leia atentamente este conjunto de instruções antes de iniciar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta.
- É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção.
- Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados. Não é necessário o uso de calculadora para sua resolução. Apesar disso, seu uso é permitido, desde que não seja uma calculadora disponível no seu telefone celular. Um aluno não é autorizado a usar a calculadora de outro aluno.
- Você deve escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores questões serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

Questão 01: Considere a matriz A singular indicada e responda justificando: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. (25%) Qual é o posto de A ?
2. (25%) $\lambda_i = 0$ é autovalor de A ?
3. (25%) Apresente bases para os quatro espaços fundamentais de A.
4. (25%) A matriz A admite fatoração de Cholesky ? Em caso positivo, apresente a fatoração.

Resolução: Questão 01

1. Posto de $A = 2$. A matriz A foi apresentada já fatorada $A = MM^T$, por meio de uma fatoração que revela seu posto, correspondendo ao número de colunas (linhas) linearmente independentes de M (de M^T).
2. Verdadeiro. A matriz A possui posto incompleto, é singular (conforme antecipado pelo enunciado), $det(A) = \prod_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i = 0$.
3. A matriz A é simétrica e, pela fatoração apresentada $C(A) = C(A^T) = span\{m_1, m_2\}$ onde $m_1 = [2 \quad 1 \quad 0]^T, m_2 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$ são as linhas de M^T. Pelos mesmos motivos, $N(A) = N(A^T)$. Para determinar um destes espaços, digamos $N(A)$, usamos o fato de que $N(A) \perp C(A^T)$. Então devemos resolver o sistema linear $M^T w = 0$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Fixando a variável livre $w_3 = -1$, temos a solução $w_2 = 1, w_1 = -\frac{1}{2}$. Portanto, $N(A) = N(A^T) = span\{[-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -1]^T\}$.
4. Não. A matriz A é singular, não é positiva definida, portanto não admite fatoração de Cholesky.

Questão 02 Sobre as fatorações básicas:

1. Considere a matriz simétrica $S = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$.

   (a) (20%) Assuma que S seja positiva definida e considere sua fatoração de Cholesky $S = LL^T = \sum_{i=1}^{4} L_i L_i^T$. Apresente L_1.

   (b) (30%) Quais as relações que devem ser satisfeitas por a, b, c, d para que a matriz S tenha posto igual a 1 ?

2. (10%) A fatoração $PA = LU$ de A é fornecida abaixo e emprega a representação do vetor *pivot* para P. Quais são os mutiplicadores empregados para a linha $i = 3$ da matriz A ?

   $pivot = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$.

   $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,111 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,125 & -0.125 & 1 & 0 & 0 \\ -0,333 & -0,125 & -0,200 & 1 & 0 \\ -0,200 & 1.000 & -0.500 & -0.200 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$U = \begin{bmatrix} 3.000 & -8.000 & 12.000 & -9.000 & 6.000 \\ 0 & 7.000 & 0.000 & -8.000 & -12.000 \\ 0 & 0 & 5.000 & 8.000 & 12.000 \\ 0 & 0 & 0 & -7.000 & 5.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.000 \end{bmatrix}$$

3. (40%) Quais são as matrizes de multiplicadores M e de permutação P tais que $\hat{A}M^{-1}P^T = A$ para as matrizes $A, \hat{A}$ indicadas abaixo ? $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5/2 & -1/2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Resolução: Questão 02

1. $r_{11} = \sqrt{a}, s = \frac{1}{\sqrt{a}}[a \quad a \quad a]^T$, Logo $L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \frac{a}{\sqrt{a}} \\ \frac{a}{\sqrt{a}} \\ \frac{a}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}$, $L_1 L_1^T = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$,

2. $\sum_{i=2}^{n} L_i L_i^T = A - L_1 L_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} = 0_{4\times 4}$. Logo, $b = a = c = d$.

3. $m_{31} = 0,333, m_{32} = 0,125, m_{33} = 0,200$.

4. Dados os fatores, temos que $\hat{A} = APM$, o que indica operações de permutação e combinação de colunas de A. A coluna 1 de A foi preservada na terceira posição de $\hat{A}$, então a terceira coluna de P é a primeira coluna da identidade. O resultado na primeira linha de $\hat{A}$ é, exceto pelo elemento na posição $1,3$, uma linha de zeros. Para se obter estes zeros foram feitas combinações lineares, usando a coluna pivot. Observe que $(-0.5)A_1 + A_2 = \hat{A}_2$ e, portanto, a segunda coluna de P é a segunda coluna da identidade. Observe também que $(0.5)A_1 + A_3 = \hat{A}_1$ e, portanto, a primeira coluna de P é a terceira da identificade. Então temos as seguintes matrizes: $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 03: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. Dados dois subsepaços $\mathcal{V}_1 = span\{[1 \quad 0 \quad 1]^T\}$, $\mathcal{V}_2 = span\{[2 \quad 1 \quad 0]^T\}$, o conjunto $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ é um subespaço.

2. Os autovetores de $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ formam uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. Se A e B são similares, um autovetor de A é autovetor de B.

4. Para duas matrizes A, B temos que $A^T B = 0$. Então, as colunas de B pertendem a $N(A)$.

5. Ao adicionarmos uma coluna b em A criando uma matriz $[A|b]$, a dimensão do espaço coluna da nova matriz aumenta quando b é linearmente dependente das demais colunas de A.

Resolução: Questão 03

1. Falso. O conjunto $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ não é fechado à soma, pois $([1 \quad 0 \quad 1]^T + [2 \quad 1 \quad 0]^T) \notin \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$.

2. Falso. A matriz possui dois autovalores iguais a 5. Porém, associa-se a ele um único autovetor $[1 \quad 0]^T$.

3. Se A, B são similares, ou seja $A = CBC^{-1}$, A e B possuem o mesmo espectro. Porém não possuem os mesmos autovetores. Veja que se B possui autopar λ, x temos:

$$\begin{aligned} A &= CBC^{-1} \\ A(Cx) &= (CBC^{-1})Cx \\ &= C(Bx) \\ &= C(\lambda x) \\ &= \lambda(Cx) \end{aligned}$$

   e Cx é autovetor de A com autovalor λ.

4. Falso porque as colunas de B pertencem a $N(A^T)$ (e são ortogonais ao $C(A)$).

5. Falso. Se b é linearmente dependente das colunas de A, $b \in C(A)$ e portanto $[A|b]$ e A possuem o mesmo espaço coluna e posto.

Questão 04:

1. (50%) Explorando os quatro espaços fundamentais, discuta a existência e unicidade de solução para o sistema linear $Ax = b$ onde $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ quando:
   (a) posto de A é completo.
   (b) posto de A é incompleto.

2. (50%) Defina a matriz A solicitada que atenda ao estabelecido em cada questão. Justifique quando não for possível.
   (a) Matriz A onde $Ax = [1\ 1\ 1]^T$ tem solução e $A^T[1\ 0\ 0]^T = [0\ 0\ 0]^T$.
   (b) Matriz A onde $[1\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T \in C(A)$ e $[1\ 2]^T, [2\ 5]^T \in C(A^T)$.

Resolução: Questão 04

1. (a) Quando posto A é completo, as dimensões de $C(A), C(A^T)$ são 4 e de $N(A)$ e $N(A^T)$ são, respectivamente 0 e 2. Ou seja, $N(A) = \{0_4\}$. Então, temos dois casos a considerar:
      - $b \notin C(A)$. Essa é uma condição possível, pois $C(A) \neq \mathcal{R}^6$.
      - O outro caso possível é $b \in C(A)$, ou seja, o sistema admite alguma solução. Suponha então que x_p seja um certificado de pertinência deste fato. Temos $Ax_p = b$ e como qualquer outra solução alternativa do sistema linear pode ser escrita como $x_p + x_n$ onde $x_n \in N(A)$, a única alternativa é $x_n = 0_4$. Logo, temos que quando há solução, a solução é única.

   (b) Seja $r < 4$ o posto da matriz A com deficiência de posto. Então as dimensões de $C(A), C(A^T)$ são r e de $N(A), N(A^T)$ são $4 - r > 0$ e $6 - r > 0$, respectivamente. Desta forma, podemos ter o caso em que $b \notin C(A)$ (como explicado acima) e como $N(A) \neq \{0_4\}$, quando há solução para o sistema linear, temos infinitas soluções.

2. Impossível pois o primeiro o vetor (vetor de 1's) pertence a $C(A)$ mas não é ortogonal a $N(A^T)$ (não é ortogonal ao vetor $[1 \quad 0 \quad 0]^T$).

3. Existem infinitas matrizes A que atendem ao solicitado, dentre elas segue uma alternativa $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.