DCC639 - ALC - Prova II

Prof. Alexandre Salles da Cunha e Profa. Ana Paula Couto

25 de Junho de 2024

Nome do aluno: Resolução da prova.

Instruções:

- Esta prova é individual e sem consulta. É uma prova discursiva, cabendo ao aluno ser claro, organizado e objetivo na apresentação de sua resolução. Estes aspectos são considerados na correção. Durante a prova, os celulares devem permanecer desligados.
- Você pode escolher 3 questões para fazer. Caso faça as 4 questões, as notas das 3 melhores serão consideradas para a nota da avaliação. As 4 questões são igualmente valoradas.

⇒ **Atenção: A sua resposta deve estar contida no espaço delimitado para cada questão, devendo ser autocontida para entendimento da resolução. A folha de rascunho que você recebe não será entregue e não será corrigida.**

Questão 01: Considere a matriz que possui suas duas primeiras colunas A_1 e A_2 linearmente independentes. Responda justificando.

1. Sabendo que P_1, P_2 são os projetores que projetam em $span\{A_1\}$ e $span\{A_2\}$, defina P_1P_2.
   Resposta:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{A_1A_1^T}{A_1^TA_1} \\
P_2 &= \frac{A_2A_2^T}{A_2^TA_2} \\
P_1P_2 &= \frac{A_1A_1^T}{A_1^TA_1}\frac{A_2A_2^T}{A_2^TA_2} \\
&= \frac{(A_1^TA_2)}{(A_1^TA_1)(A_2^TA_2)}A_1A_2^T \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. Qual é o posto de P_1P_2 ?
   Resposta: A expressão (1) mostra que P_1P_2 é o produto de um escalar $\frac{(A_1^TA_2)}{(A_1^TA_1)(A_2^TA_2)}$ por uma matriz $A_1A_2^T$ cujo posto é 1, tem espaço coluna é dado por $span\{A_1\}$ e espaço linha é dado por $span\{A_2\}$. Logo, o posto de P_1P_2 é 1.

3. P_1P_2 é um projetor ? Em caso positivo, é projetor ortogonal ou oblíquo ?
   Resposta: Falso. Para que seja projetor P_1P_2 deve ser idempotente, isto é: $P_1P_2P_1P_2 = P_1P_2$. Então $P_1(P_2P_1)P_2 = P_1P_2$ e portanto $P_2P_1 = I$. Isso é impossível, pois por analogia com a expressão (1), $P_2P_1 = \frac{(A_1^TA_2)}{(A_1^TA_1)(A_2^TA_2)}A_2A_1^T$ e também é uma matriz de posto 1. Como I possui posto completo isso não pode ocorrer.

4. Considere agora que P_1, P_2 são os projetores ortogonais que projetam em $span\{A_1\}$ e $span\{A_1, A_2\}$, respectivamente. Indique claramente o resultado de P_2P_1.
   Resposta: $P_2P_1 = P_1$ pois toda coluna de P_1 pertence a $span\{A_1, A_2\}$, espaço em que o projetor P_2 projeta.

Questão 02: A fatoração QR de uma matriz A é apresentada abaixo. Para a fatoração, foi empregado o algoritmo de Gram-Schimid revisado com pivoteamento. Responda, justificando sua resposta com base nos resultados apresentados pela fatoração:

```
Q  =
  0.3552925  -0.4133617
  0.6661734   0.2534585
  0.3108809  -0.7851962
  0.2220578   0.1651537
  0.5329387   0.3479684
R  =
  22.51666  -1.6432277   12.079944   10.436716
  0.         8.2643695  -4.1321847   4.1321847
pivot  =    2.    4.    3.    1.
```

1. Quais as dimensões de A e o posto de A ?
   Resposta: O número de linhas de A é o número de linhas de Q e o número de colunas de A é o número de colunas de R. Portanto, A possui 5 linhas e 4 colunas. A matriz A possui posto 2, que é o número de linhas de R e colunas de Q.

2. Por que $r_{11} \geq r_{22}$?
   Resposta: Foi empregado pivotemento de colunas. Isso significa que a primeira coluna de A que é ortogonalizada é aquela de maior norma Euclideana. A partir daí, na iteração $j > 1$, a coluna de A que é ortogonalizada é, dentre as não ortogonalizadas até então, aquela coluna A_k cuja projeção em $span\{q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}\}^{\perp}$ possui maior norma. Isto é, na iteração j escolhe-se a coluna que maximiza $\|A_k - \sum_{i=1}^{j-1}(q_i^T A_k)q_i\|_2$. Por esta razão, sempre ortogonalizamos um vetor cuja norma é não superior à norma dos vetores anteriormente ortogonalizados e estas grandezas (as normas dos erros) são armazenadas na diagonal de R.

3. Escreva as colunas de $A_1, A_2, \ldots$ de A em função das colunas de Q, $q_1, q_2, \ldots$.
   Resposta: $AP = QR$, onde P é uma matriz $n \times n$ $(n = 4)$ de permutação. Para escrever esta expressão de forma conveniente, definimos $A_{pivot(k)}$ como a $pivot(k)-$ésima coluna de A para todo $k = 1, 2, 3, 4$. Considerando que o posto da matriz A é 2, temos

$$A_{pivot(k)} = \sum_{i=1}^{\min\{posto(A),k\}} r_{ik} q_i,$$

   que resulta em:

$$\begin{aligned}
A_2 &= 22.51666(q_1) && k = 1 \\
A_4 &= -1.6432277(q_1) + 8.2643695(q_2) && k = 2 \\
A_3 &= 12.079944(q_1) - 4.1321847(q_2) && k = 3 \\
A_1 &= 10.436716(q_1) + 4.1321847(q_2) && k = 4
\end{aligned}$$

4. Como calcularia a fatoração QR completa de A à partir da fatoração apresentada ? Quais informações adicionais esta fatoração produziria e como estas informações seriam organizadas nas novas matrizes de fatores (Q, R, etc...) ? **Resposta:**

passo 1 Adicionaria 3 linhas em R pois esta é a dimensão de $N(A^T)$.

passo 2 Encontraria uma base para $N(A^T)$. Vamos definir esta base pelas colunas $\tilde{q}_i : i = 3, 4, 5$, que devem ser encontradas resolvendo-se o sistema linear homogêneo com duas restrições e 5 variáveis (isto é, 3 variáveis livres) definido por $q_1^T \tilde{q}_i = 0, q_2^T \tilde{q}_i = 0$ para $i = 3, 4, 5$.

passo 3 Orgonalizamos as colunas $\tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_5$, usando fatoração $\tilde{Q} = QR$, obtendo q_3, q_4, q_5, 3 colunas ortonormais, base ortonormal para $N(A^T)$.

passo 4 Justapomos as colunas q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 formando a nova matriz $Q : 5 \times 5$ desejada.

A fatoração completa informa uma base ortonormal para $C(A)$ (dada pelas primeiras posto(A) colunas de Q) e uma base ortonormal para $N(A^T)$ dada pelas últimas $n - posto(A)$ colunas de Q.

Questão 03: Considere a função $b(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ e um conjunto de dados a serem ajustados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, m\}$, satisfazendo $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Responda:

1. No ajuste linear dos dados acima pela função $b(x)$ escolhida, é calculado um vetor de parâmetros $\hat{x}$ que minimiza a norma Euclideana do erro $r(\hat{x}) = z - A\hat{x}$, para A e z correspondentes ao ajuste. Identifique A e z em função dos dados.
Resposta: $A = \begin{bmatrix} e^{x_1} & e^{-x_1} \\ e^{x_2} & e^{-x_2} \\ \vdots & \vdots \\ e^{x_m} & e^{-x_m} \end{bmatrix}$, $z = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ já que o sistema é linear nos parâmetros α, β.

2. O processo de identificar $\hat{x}$ que minimiza $r(\hat{x})$ pode ser entendido como um processo de projeção. Considerando os dados $\{(x_i, b_i) : i = 1, \ldots, m\}$ disponíveis, o quê é projetado e onde é projetado ? Seja preciso em função dos dados.
Resposta: b é projetado em $span\{A_1, A_2\} = C(A)$.

3. Identifique o sistema linear que permite encontrar $\hat{x}$, isto é, defina claramente a matriz de coeficientes e o termo independente do sistema linear, em função dos dados.
Resposta: O sistema é o sistema de equações normais $A^T A\hat{x} = A^T b$,
onde $A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m e^{2x_i} & m \\ m & \sum_{i=1}^m e^{-2x_i} \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m b_i e^{x_i} \\ \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{e^{x_i}} \end{bmatrix}$

Questão 04: Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. Se P é um projetor e $Pb = b$ então P é a matriz identidade.
Resposta: Falso. $Pb = b$ é verdadeira quando $b \in C(P)$, mesmo quando $P \neq I$ e portanto P possui posto deficiente.

2. O produto de dois projetores ortogonais é um projetor ortogonal.
Resposta: Falso, veja o contra-exemplo $P_1 P_2$ dado que questão 1 desta avaliação.

3. Sejam ALG1 e ALG2, algoritmos propostos para fatorar a matriz A em QR. Para ALG1, obtemos a matriz Q_1 e temos $||I - Q_1^T Q_1|| = 10^{-08}$ e para ALG2, obtemos Q_2 e $||I - Q_2^T Q_2|| = 10^{-02}$. ALG2 apresentou melhores resultados numéricos.
Resposta: Falso. ALG1 produziu uma matriz Q_1 mais próxima de ter colunas de fato ortonormais que ALG2 pois, $\|I - Q_1^T Q_1\|_2 <<< \|I - Q_2^T Q_2\|_2$.

4. Se a fatoração $QR = A$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ de posto completo é conhecida, o sistema de equações normais que resolve $\min\|Ax - b\|_2$ pode ser formulado como $Rx = Q^T b$ e pode ser resolvido ao custo de $O(n^2)$ operações elementares.
Resposta: Verdadeiro.

$$\begin{aligned} A^T Ax &= A^T b \\ (R^T Q^T QR)x &= R^T Q^T b \\ Rx &= Q^T b \qquad\qquad R^{-T} \text{ existe e } Q^T Q = I \end{aligned}$$

O sistema linear $Rx = Q^T b$ possui ordem n e é triangular superior, podendo ser resolvido em $O(n^2)$ operações aritméticas.

5. Considere que $\hat{x}$ seja uma solução para o Problema de Mínimos Quadrados (PMQ) $\min\|Ax-b\|_2$. Se o posto de A é incompleto, $\hat{x}$ é único e também é único o ponto $p = A\hat{x}$ em $C(A)$ que minimiza a distância de b a $C(A)$.
Resposta: Falso. O sistema linear $A^T A\hat{x} = A^T b$ possui infinitas soluções pois $N(A^T A) \neq \{0\}$, a dimensão de $N(A^T A) \geq 1$. Portanto se $\hat{x}$ é uma solução para o sistema de equações normais, $\hat{x} + x_N$ para qualquer $x_N \in N(A^T A)$ também é. O ponto de projeção $A\hat{x}$ é de fato é único, conforme o enunciado da questão.